الفصل الخامس

مدخل إلى نظرية السطوح

نختم كتابنا هذا بدراسة موجزة لنظرية السطوح. نعرف السطح كدالة متجهة تابعة لمتحولين ونعرف السطح البسيط والسطح النظامي ونعرف التمثيلات المختلفة لمعادلة السطح والمستوي المماس والمستقيم الناظم لسطح في نقطة منه، وأخيراً نتعرف على بعض السطوح الشهيرة.

1-5 تعاريف أساسية:

1-1-5 تعريف:

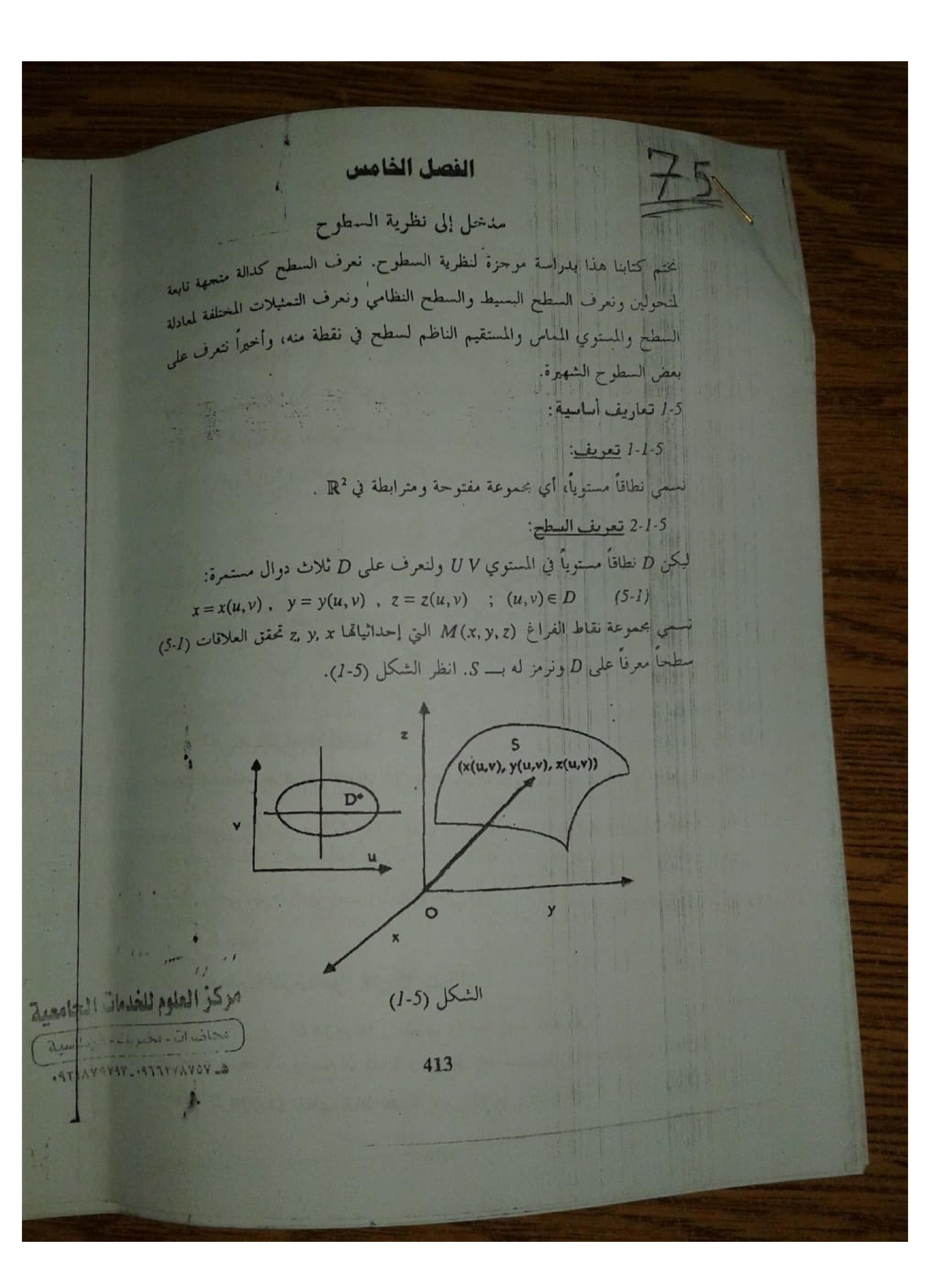
نسمي نطاقاً مستوياً، أي مجموعة مفتوحة ومترابطة في $\mathbb{R}^2$.

2-1-5 تعريف السطح:

ليكن D نطاقاً مستوياً في المستوي UV ولنعرف على D ثلاث دوال مستمرة:

$$x = x(u,v)\ ,\quad y = y(u,v)\ ,\quad z = z(u,v)\quad ;\quad (u,v)\in D \qquad (5\text{-}1)$$

نسمي مجموعة نقاط الفراغ $M(x,y,z)$ التي إحداثياتها z, y, x تحقق العلاقات (5-1) سطحاً معرفاً على D ونرمز له بـ S. انظر الشكل (1-5).



الشكل (1-5)

ونسمي العلاقات (5-1) المعادلات الوسيطية للسطح S ونسمي u, v وسيطي السطح، ونقول إن السطح S معطى وسيطياً بالعلاقات (5-1).

وبفرض i, j, k متجهات الوحدة على المحاور الإحداثية فإن السطح S المعطى بالمعادلات (5-1) يعرف أيضاً بالدالة المتجهية:

$$R(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k \qquad (5-2)$$

وتدعى هذه المعادلة بالمعادلة المتجهة للسطح S ونسمي المتجه $R(u,v)$ متجه الموضع للنقطة $M(x, y, z)$ من السطح S.

5-1-3 ملاحظة:

يمكن أن نعرف السطح S بأنه مجموعة نقاط الفراغ $M(x, y, z)$ التي تحقق المعادلة:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (5-3)$$

حيث F دالة مستمرة على النطاق $D \subseteq R^3$.

نسمي المعادلة (5-3) المعادلة الضمنية للسطح S.

فإذا أمكن كتابة المعادلة (5-3) بدلالة أحد المتحولات وليكن z على النحو:

$$z = f(x, y) \qquad (5-4)$$

عندئذٍ نسمي الشكل (5-4) لمعادلة السطح S بالمعادلة الظاهرية للسطح. في هذه الحالة يمكن اعتبار المتحولان x, y بمثابة الوسيطين u, v في معادلة السطح (5-4). وعندئذٍ نكتب المعادلة (5-4) وسيطياً على النحو الآتي:

$$x = u \ , \ y = v \ , \ z = f(u,v) \qquad (5-5)$$

أو متجهياً بالشكل:

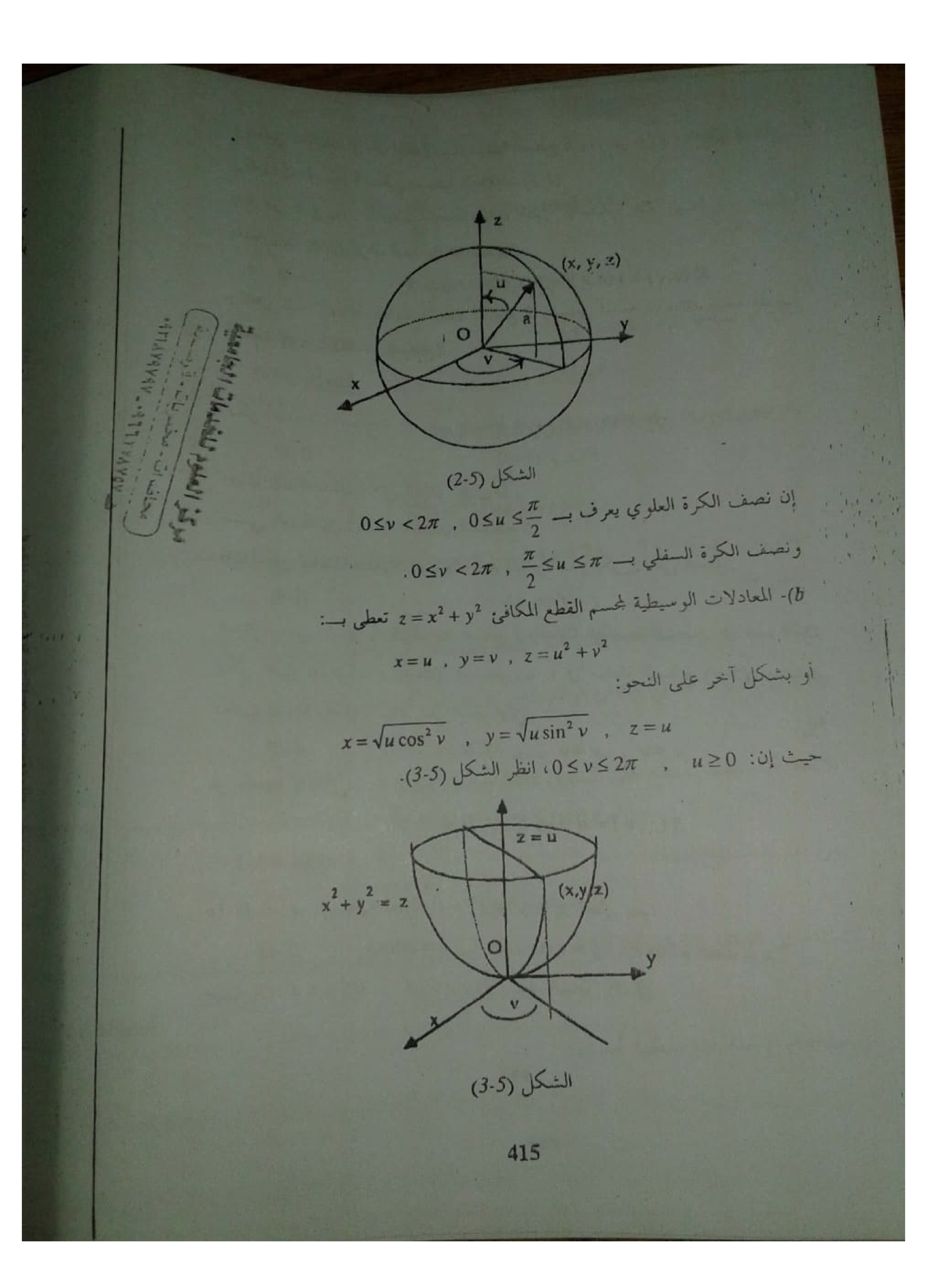
$$R(x, y) = xi + yj + z(x, y)k$$

5-1-4 أمثلة:

a)- المعادلات الوسيطية للكرة $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ تعطى بـــ:

$$x = a\sin u\cos v \ , \ y = a\sin u\sin v \ , \ z = a\cos u \qquad (5-6)$$

حيث إن: $0 \le u \le \pi$, $0 \le v \le 2\pi$ ، انظر الشكل (5-2).



الشكل (2-5)

إن نصف الكرة العلوي يعرف بـ $0 \le u \le \frac{\pi}{2}$ ، $0 \le v < 2\pi$

ونصف الكرة السفلي بـ $\frac{\pi}{2} \le u \le \pi$ ، $0 \le v < 2\pi$.

b)- المعادلات الوسيطية لمجسم القطع المكافئ $z = x^2 + y^2$ تعطى بـ:

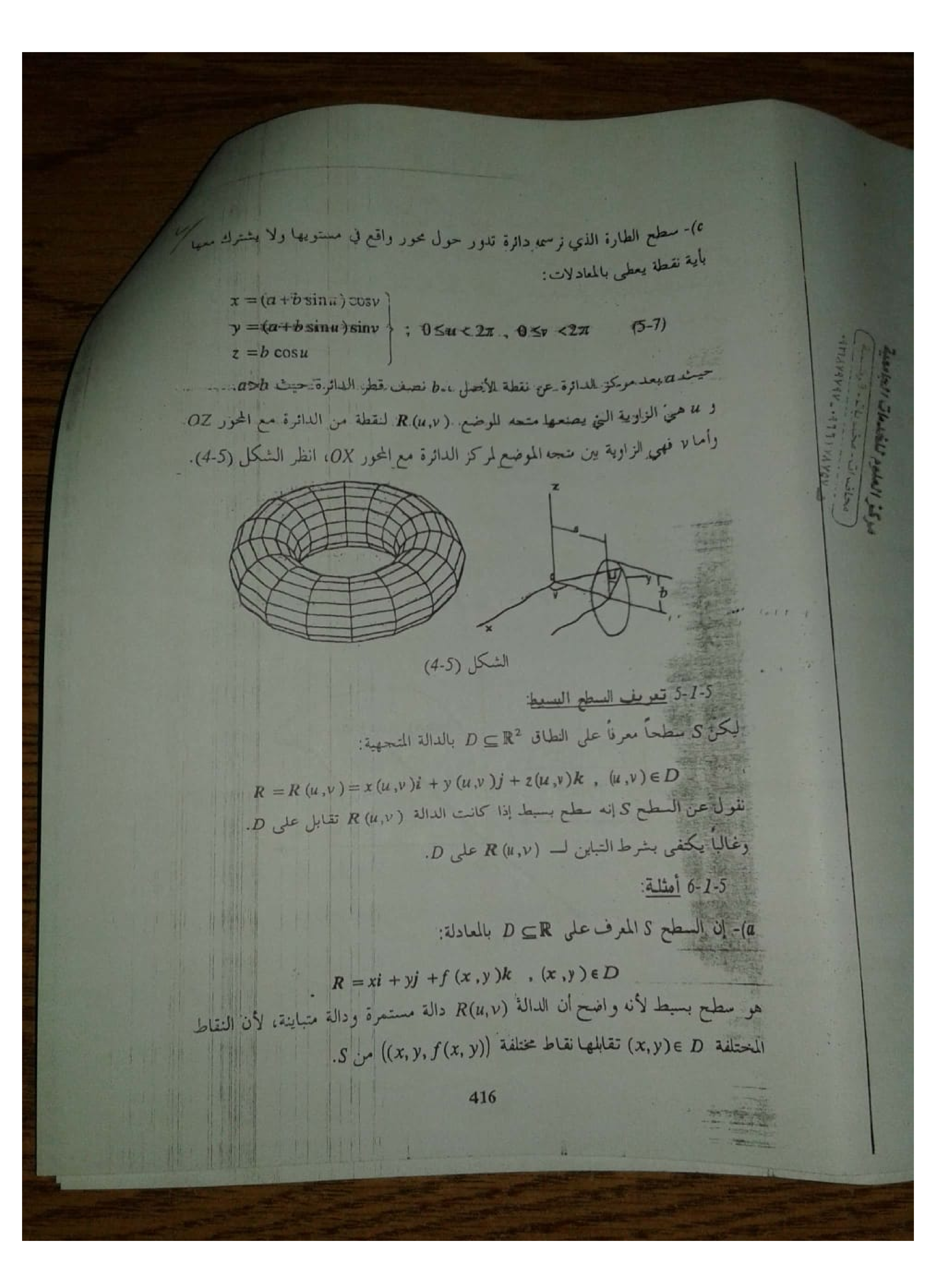
$$x = u \quad , \quad y = v \quad , \quad z = u^2 + v^2$$

أو بشكل آخر على النحو:

$$x = \sqrt{u \cos^2 v} \quad , \quad y = \sqrt{u \sin^2 v} \quad , \quad z = u$$

حيث إن: $u \ge 0$ ، $0 \le v \le 2\pi$، انظر الشكل (3-5).

الشكل (3-5)



c)- سطح الطارة الذي ترسمه دائرة تدور حول محور واقع في مستويها ولا يشترك معها بأية نقطة يعطى بالمعادلات:

$$\left.\begin{aligned} x &= (a+b\sin u)\cos v \\ y &= (a+b\sin u)\sin v \\ z &= b\cos u \end{aligned}\right\} ;\quad 0 \le u < 2\pi \;,\; 0 \le v < 2\pi \qquad (5\text{-}7)$$

حيث a بعد مركز الدائرة عن نقطة الأصل، b نصف قطر الدائرة، حيث $a>b$.

و u هي الزاوية التي يصنعها متجه الموضع $R(u,v)$ لنقطة من الدائرة مع المحور OZ وأما v فهي الزاوية بين متجه الموضع لمركز الدائرة مع المحور OX، انظر الشكل (4-5).

الشكل (4-5)

5-1-5 تعريف السطح البسيط:

ليكن S سطحاً معرفاً على النطاق $D \subseteq \mathbb{R}^2$ بالدالة المتجهية:

$$R = R(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k \;,\; (u,v) \in D$$

نقول عن السطح S إنه سطح بسيط إذا كانت الدالة $R(u,v)$ تقابل على D.

وغالباً يكتفى بشرط التباين لـ $R(u,v)$ على D.

6-1-5 أمثلة:

a)- إن السطح S المعرف على $D \subseteq \mathbb{R}$ بالمعادلة:

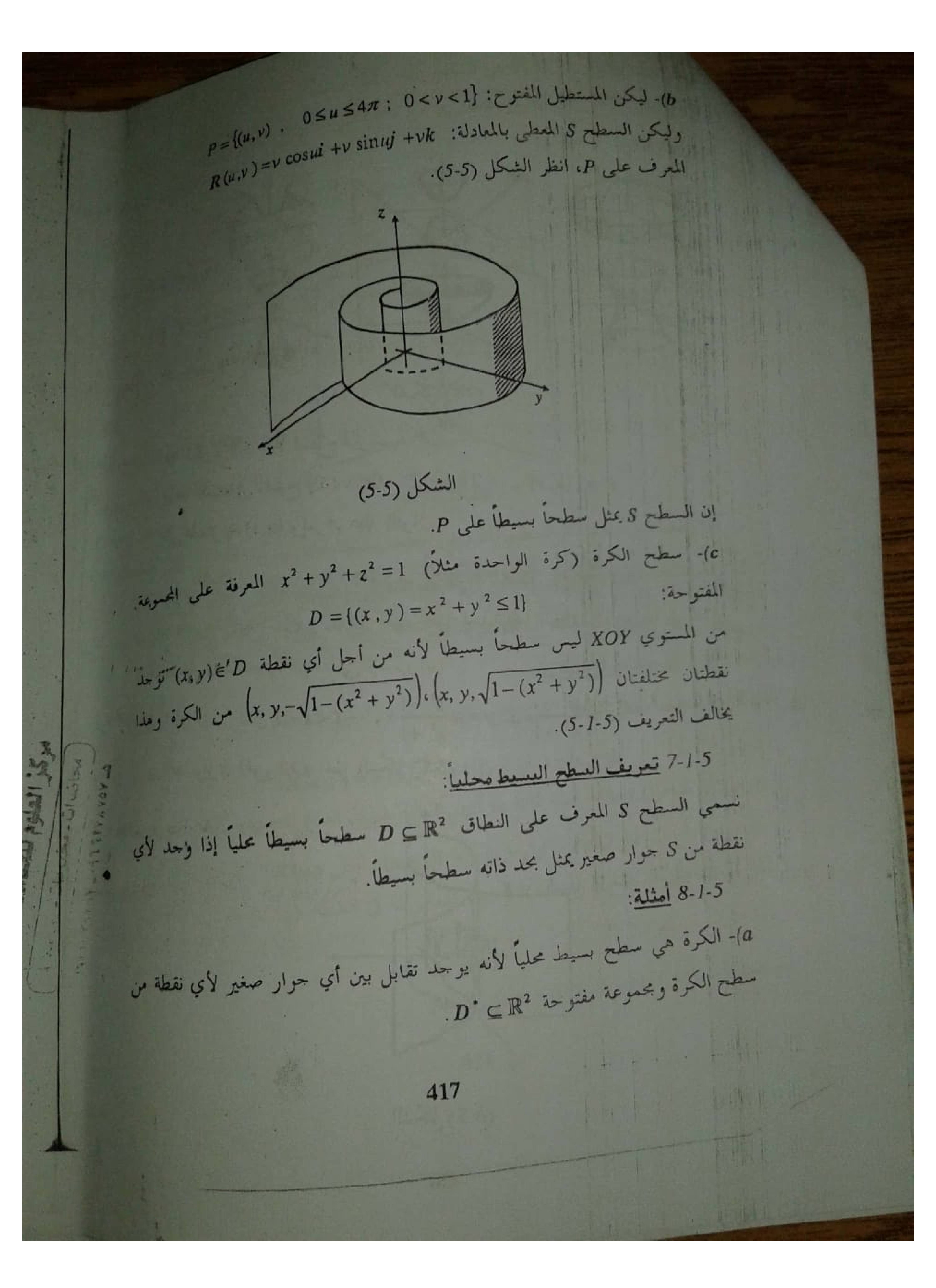
$$R = xi + yj + f(x,y)k \;,\; (x,y) \in D$$

هو سطح بسيط لأنه واضح أن الدالة $R(u,v)$ دالة مستمرة ودالة متباينة، لأن النقاط المختلفة $(x,y) \in D$ تقابلها نقاط مختلفة $((x,y,f(x,y))$ من S.

b)- ليكن المستطيل المفتوح: $P=\{(u,v)\ .\ 0\le u\le 4\pi\ ;\ 0<v<1\}$

وليكن السطح S المعطى بالمعادلة: $R(u,v)=v\cos ui+v\sin uj+vk$

المعرف على P، انظر الشكل (5-5).



الشكل (5-5)

إن السطح S يمثل سطحاً بسيطاً على P.

c)- سطح الكرة (كرة الواحدة مثلاً) $x^2+y^2+z^2=1$ المعرفة على المجموعة المفتوحة:

$$D=\{(x,y)=x^2+y^2\le 1\}$$

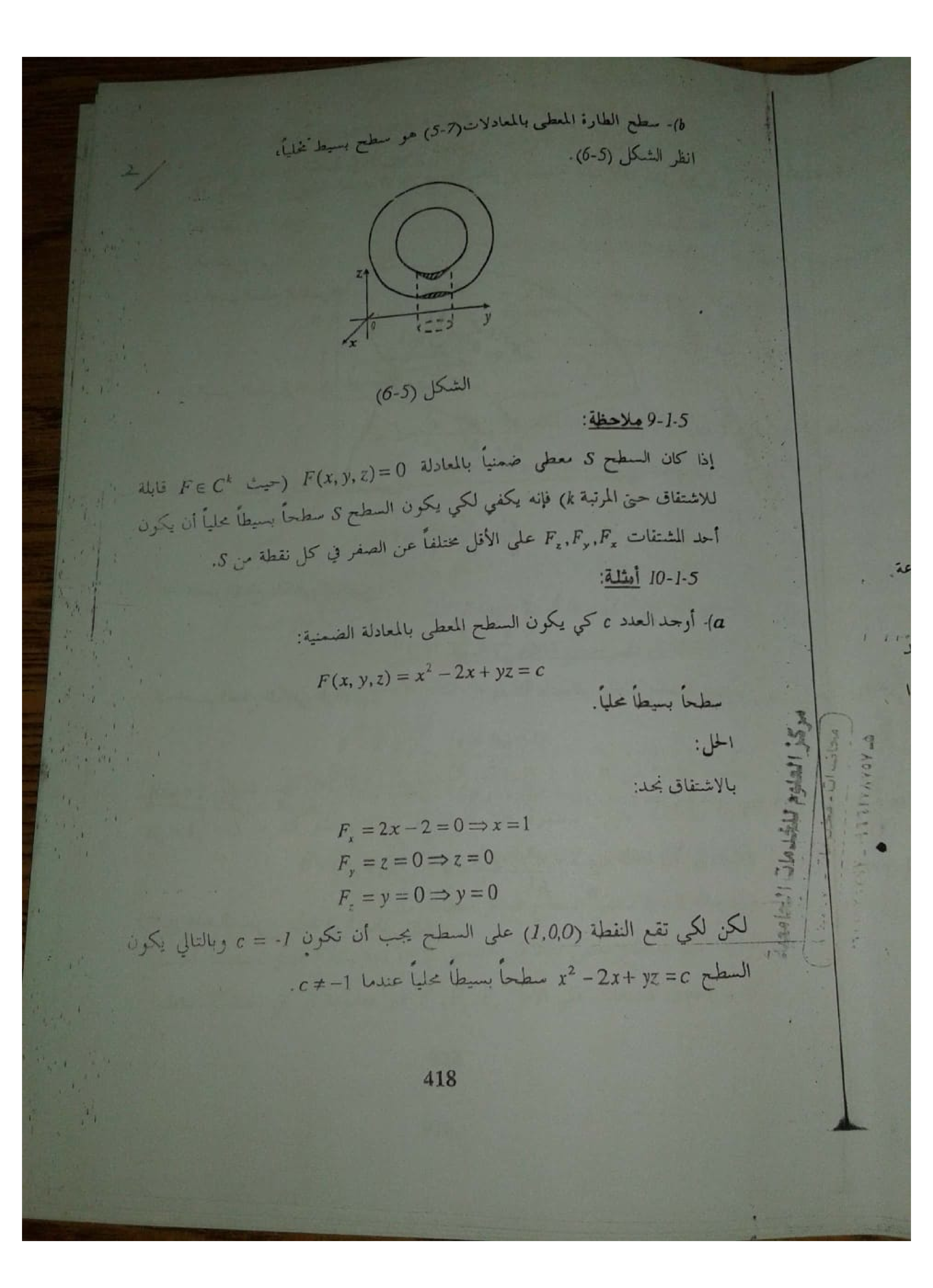
من المستوي XOY ليس سطحاً بسيطاً لأنه من أجل أي نقطة $(x,y)\in' D$ توجد نقطتان مختلفتان $\left(x,y,\sqrt{1-(x^2+y^2)}\right)$، $\left(x,y,-\sqrt{1-(x^2+y^2)}\right)$ من الكرة وهذا يخالف التعريف (5-1-5).

5-1-7 <u>تعريف السطح البسيط محلياً</u>:

نسمي السطح S المعرف على النطاق $D\subseteq\mathbb{R}^2$ سطحاً بسيطاً محلياً إذا وجد لأي نقطة من S جوار صغير يمثل بحد ذاته سطحاً بسيطاً.

5-1-8 <u>أمثلة</u>:

a)- الكرة هي سطح بسيط محلياً لأنه يوجد تقابل بين أي جوار صغير لأي نقطة من سطح الكرة ومجموعة مفتوحة $D^*\subseteq\mathbb{R}^2$.



b)- سطح الطارة المعطى بالمعادلات(5-7) هو سطح بسيط محلياً، انظر الشكل (5-6).

الشكل (5-6)

5-1-9 ملاحظة:

إذا كان السطح S معطى ضمنياً بالمعادلة $F(x,y,z)=0$ (حيث $F\in C^k$ قابلة للاشتقاق حتى المرتبة k) فإنه يكفي لكي يكون السطح S سطحاً بسيطاً محلياً أن يكون أحد المشتقات F_x, F_y, F_z على الأقل مختلفاً عن الصفر في كل نقطة من S.

5-1-10 أمثلة:

a)- أوجد العدد c كي يكون السطح المعطى بالمعادلة الضمنية:

$$F(x,y,z)=x^2-2x+yz=c$$

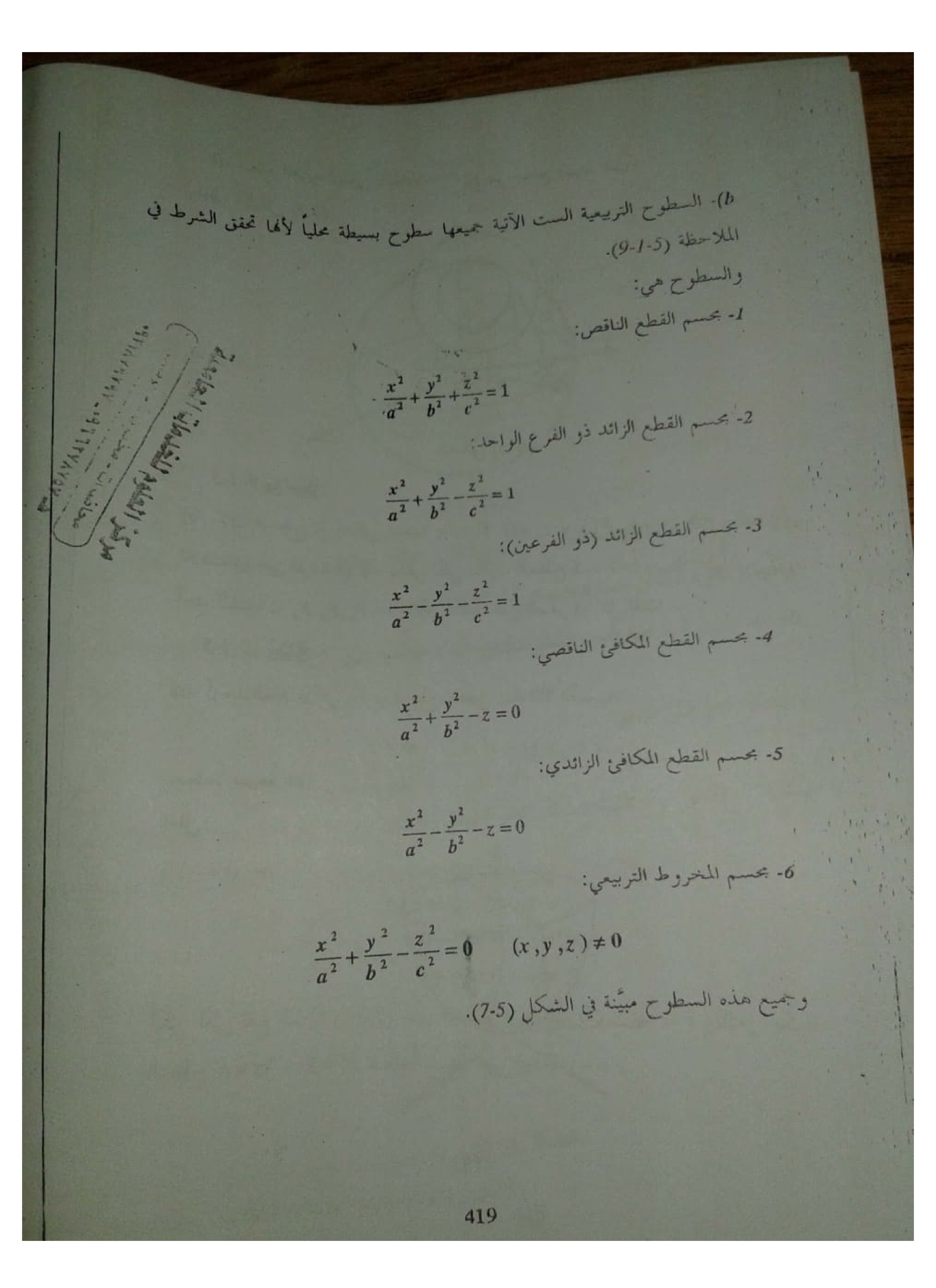
سطحاً بسيطاً محلياً.

الحل:

بالاشتقاق نجد:

$$F_x=2x-2=0\Rightarrow x=1$$
$$F_y=z=0\Rightarrow z=0$$
$$F_z=y=0\Rightarrow y=0$$

لكن لكي تقع النقطة $(1,0,0)$ على السطح يجب أن تكون $c=-1$ وبالتالي يكون السطح $x^2-2x+yz=c$ سطحاً بسيطاً محلياً عندما $c\neq -1$.



b)- السطوح التربيعية الست الآتية جميعها سطوح بسيطة محلياً لأنها تحقق الشرط في الملاحظة (9-1-5).

والسطوح هي:

1- مجسم القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

2- مجسم القطع الزائد ذو الفرع الواحد:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

3- مجسم القطع الزائد (ذو الفرعين):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

4- مجسم القطع المكافئ الناقصي:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$$

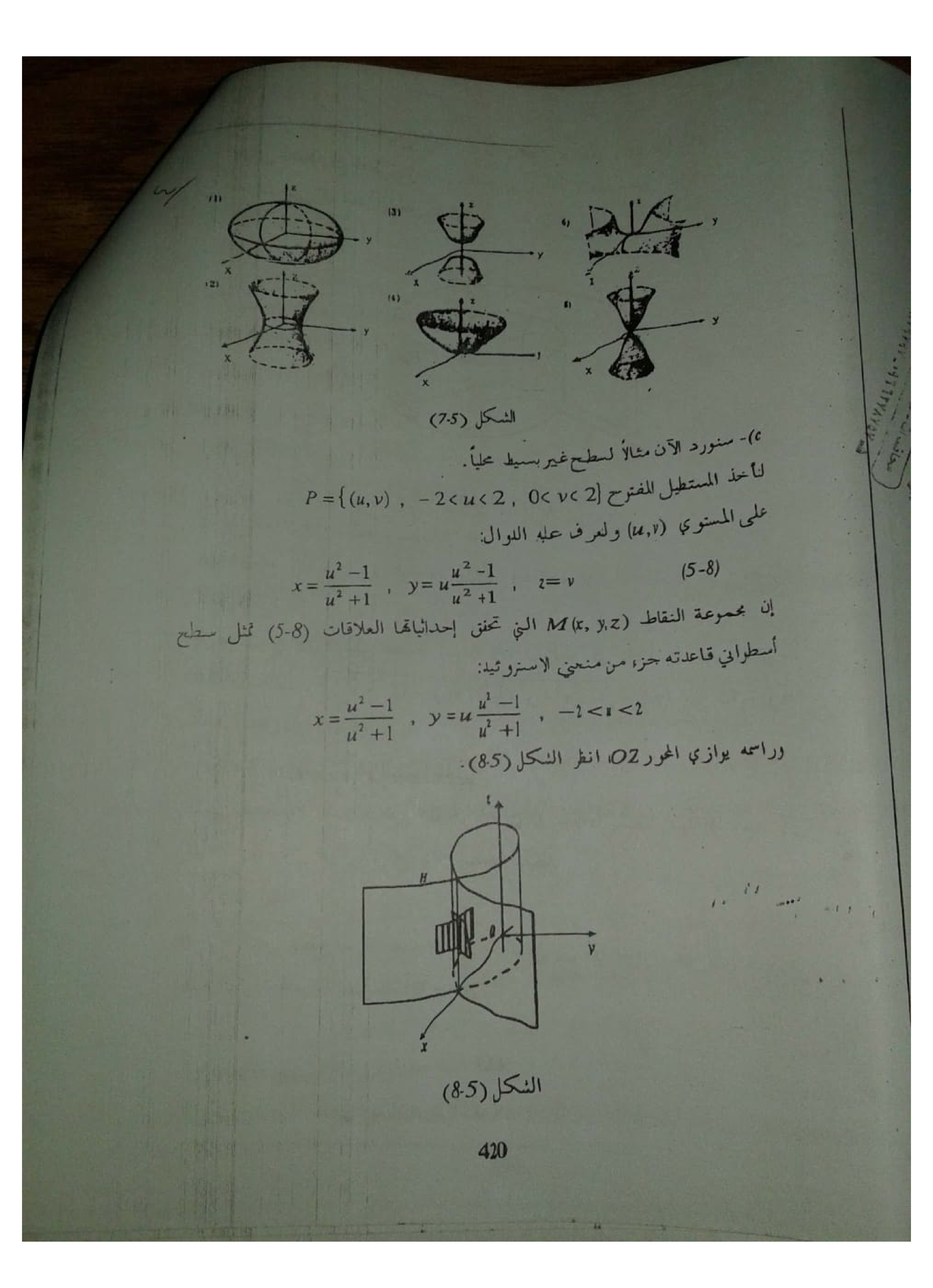
5- مجسم القطع المكافئ الزائدي:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$$

6- مجسم المخروط التربيعي:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (x,y,z)\neq 0$$

وجميع هذه السطوح مبيَّنة في الشكل (5-7).



الشكل (7-5)

c)- سنورد الآن مثالاً لسطح غير بسيط محلياً.

لنأخذ المستطيل المفتوح $P = \{(u,v)\ ,\ -2<u<2\ ,\ 0<v<2\}$

على المستوي (u,v) ولنعرف عليه الدوال:

$$x = \frac{u^2-1}{u^2+1}\ ,\quad y = u\frac{u^2-1}{u^2+1}\ ,\quad z = v \qquad (5\text{-}8)$$

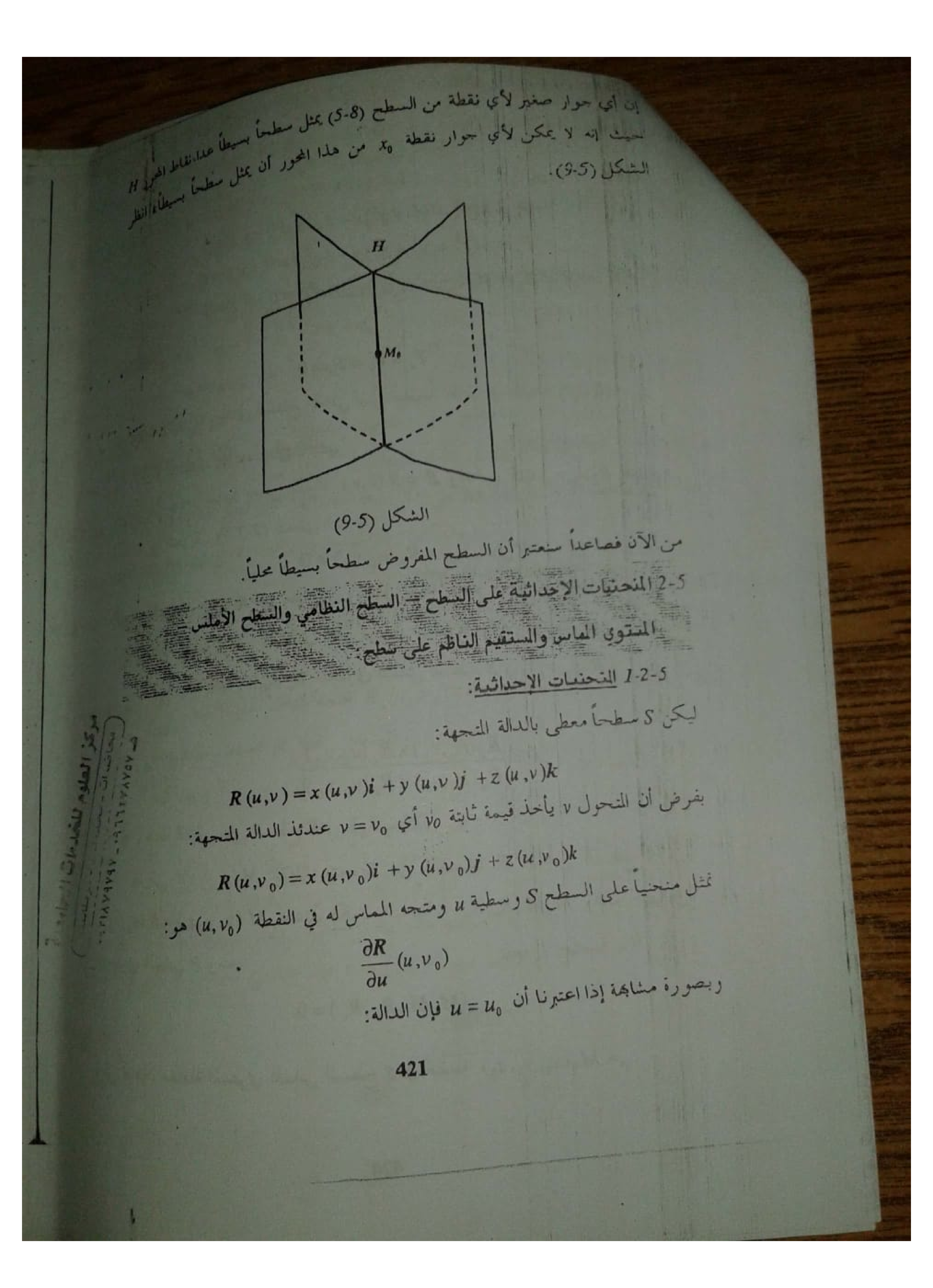
إن مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق إحداثياتها العلاقات $(5\text{-}8)$ تمثل سطح أسطواني قاعدته جزء من منحني الاستروفيد:

$$x = \frac{u^2-1}{u^2+1}\ ,\quad y = u\frac{u^2-1}{u^2+1}\ ,\quad -2<u<2$$

وراسمه يوازي المحور OZ، انظر الشكل (8-5).

الشكل (8-5)

إن أي جوار صغير لأي نقطة من السطح (5-8) يمثل سطحاً بسيطاً عدا نقاط المحور H بحيث إنه لا يمكن لأي جوار نقطة x_0 من هذا المحور أن يمثل سطحاً بسيطاً، انظر الشكل (5-9).



الشكل (5-9)

من الآن فصاعداً سنعتبر أن السطح المفروض سطحاً بسيطاً محلياً.

5-2 المنحنيات الإحداثية على السطح – السطح النظامي والسطح الأملس – المستوي المماس والمستقيم الناظم على سطح:

5-2-1 المنحنيات الإحداثية:

ليكن S سطحاً معطى بالدالة المتجهة:

$$R(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k$$

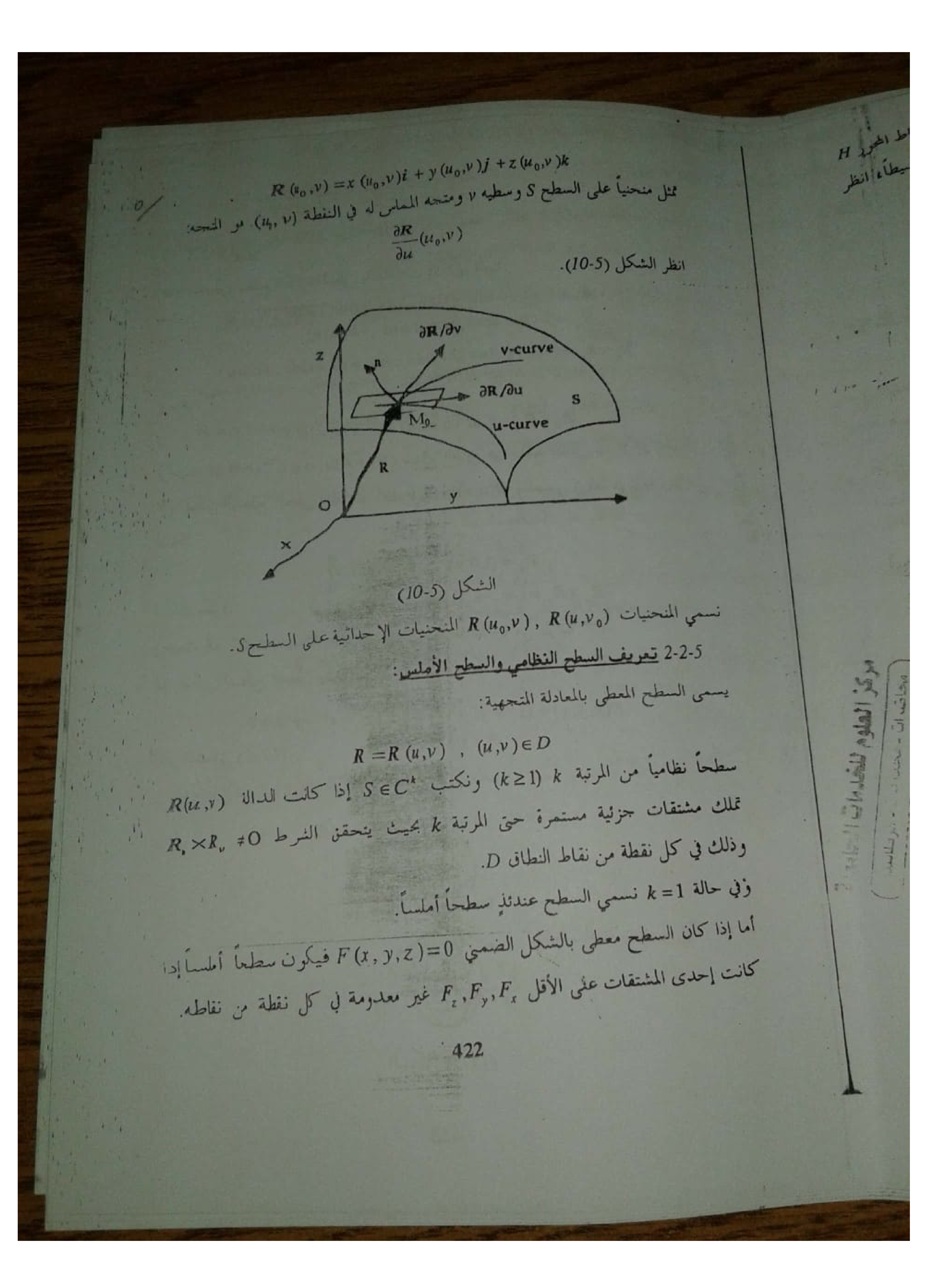
بفرض أن المتحول v يأخذ قيمة ثابتة v_0 أي $v = v_0$ عندئذ الدالة المتجهة:

$$R(u,v_0) = x(u,v_0)i + y(u,v_0)j + z(u,v_0)k$$

تمثل منحنياً على السطح S وسطية u ومتجه المماس له في النقطة (u, v_0) هو:

$$\frac{\partial R}{\partial u}(u,v_0)$$

وبصورة مشابهة إذا اعتبرنا أن $u = u_0$ فإن الدالة:



$$R(u_0,v) = x(u_0,v)i + y(u_0,v)j + z(u_0,v)k$$

تمثل منحنياً على السطح S وسطيه v ومتجه المماس له في النقطة (u_0, v) هو المتجه:

$$\frac{\partial R}{\partial u}(u_0,v)$$

انظر الشكل $(10\text{-}5)$.

الشكل $(10\text{-}5)$

نسمي المنحنيات $R(u,v_0)$, $R(u_0,v)$ المنحنيات الإحداثية على السطح S.

2-2-5 <u>تعريف السطح النظامي والسطح الأملس</u>:

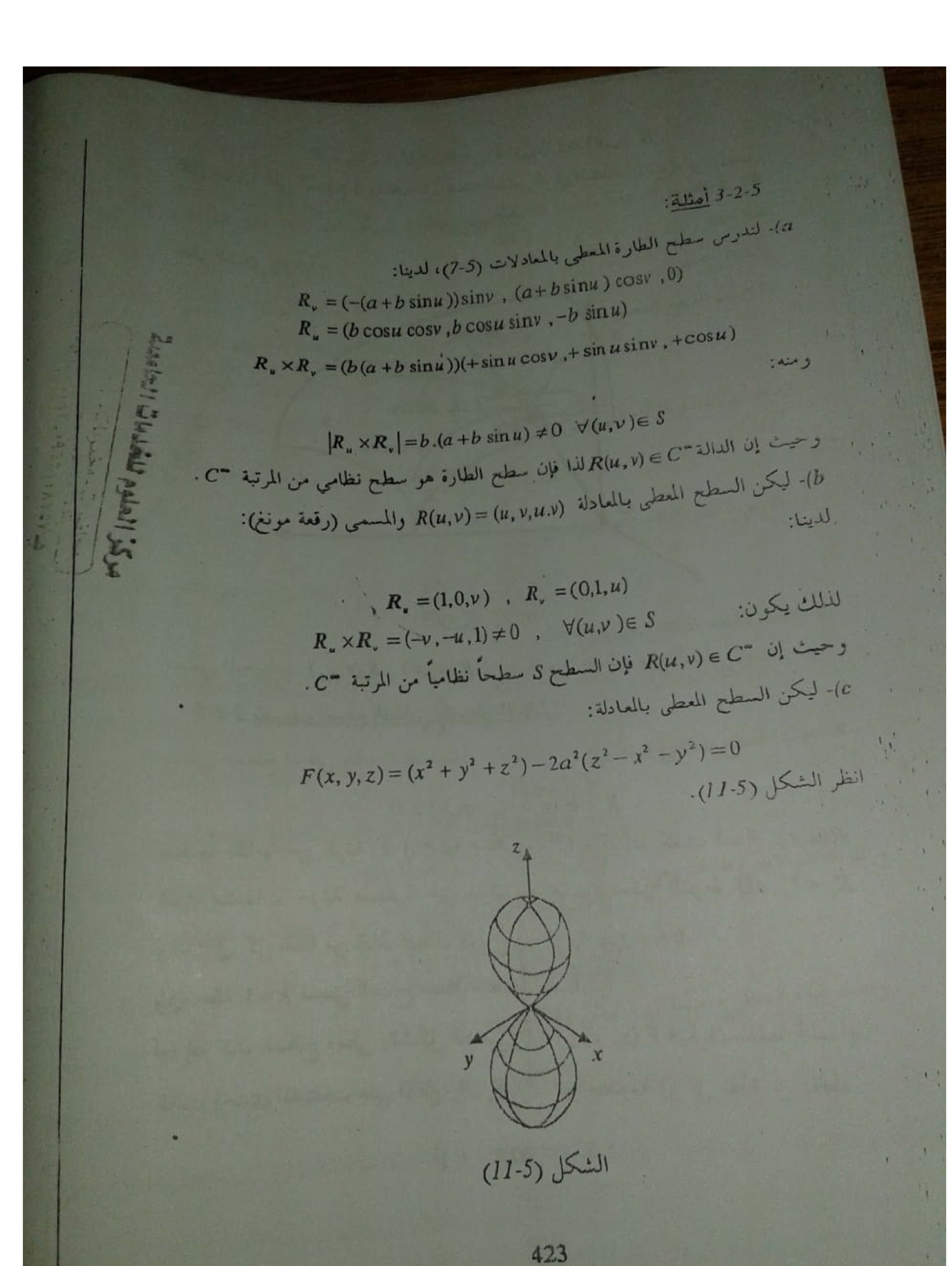
يسمى السطح المعطى بالمعادلة المتجهية:

$$R = R(u,v) \quad , \quad (u,v) \in D$$

سطحاً نظامياً من المرتبة k $(k \geq 1)$ ونكتب $S \in C^k$ إذا كانت الدالة $R(u,v)$ تملك مشتقات جزئية مستمرة حتى المرتبة k بحيث يتحقق الشرط $R_u \times R_v \neq 0$ وذلك في كل نقطة من نقاط النطاق D.

وفي حالة $k=1$ نسمي السطح عندئذٍ سطحاً أملساً.

أما إذا كان السطح معطى بالشكل الضمني $F(x,y,z)=0$ فيكون سطحاً أملساً إذا كانت إحدى المشتقات على الأقل F_x, F_y, F_z غير معدومة في كل نقطة من نقاطه.



3-2-5 أمثلة:

a)- لندرس سطح الطارة المعطى بالمعادلات (7-5)، لدينا:

$$R_v = (-(a+b\sin u))\sin v\ ,\ (a+b\sin u)\cos v\ ,0)$$

$$R_u = (b\cos u\cos v\ ,b\cos u\sin v\ ,-b\sin u)$$

ومنه:

$$R_u \times R_v = (b(a+b\sin u))(+\sin u\cos v\ ,+\sin u\sin v\ ,+\cos u)$$

$$|R_u \times R_v| = b.(a+b\sin u) \neq 0 \quad \forall (u,v)\in S$$

وحيث إن الدالة $R(u,v)\in C^{\infty}$ لذا فإن سطح الطارة هو سطح نظامي من المرتبة C^{∞}.

b)- ليكن السطح المعطى بالمعادلة $R(u,v)=(u,v,u.v)$ والمسمى (رقعة مونغ):
لدينا:

$$R_u = (1,0,v)\ ،\ R_v = (0,1,u)$$

لذلك يكون:

$$R_u \times R_v = (-v,-u,1) \neq 0\ ,\ \forall (u,v)\in S$$

وحيث إن $R(u,v)\in C^{\infty}$ فإن السطح S سطحاً نظامياً من المرتبة C^{∞}.

c)- ليكن السطح المعطى بالمعادلة:

$$F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2) - 2a^2(z^2-x^2-y^2) = 0$$

انظر الشكل (11-5).

الشكل (11-5)

لدينا:

$$F_x = 4(x^2+y^2+z^2)x + 4a^2x = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$F_y = 4(x^2+y^2+z^2)y + 4a^2y = 0 \Rightarrow y = 0$$
$$F_z = 4(x^2+y^2+z^2)z - 4a^2z = 0 \Rightarrow z = 0$$

نلاحظ أن:

$$F_x = F_y = F_z = 0$$

في النقطة $(0,0,0)$ وبالتالي السطح المعطى ليس سطحاً نظامياً في النقطة $(0,0,0)$.

4-2-5 <u>المستوي المماس لسطح نظامي</u>:

بفرض S سطحاً نظامياً معطى بالدالة $R = R(u,v)$ ولتكن $R(u_0,v_0) \in S$ عندئذٍ استناداً إلى التعريف (2-2-5) يتحقق الشرط:

$$R_u(u_0,v_0) \times R_v(u_0,v_0) \neq 0 \qquad (5\text{-}9)$$

أي إن المتجهين R_u, R_v غير متوازيين وبالتالي يوجد مستوٍ وحيد يمر بهما.

- بالتعريف: نسمي المستوي المار من $R(u_0,v_0)$ والحاوي لكل من المتجهين $R_u(u_0,v_0), R_v(u_0,v_0)$ المستوي المماس للسطح S في $R(u_0,v_0)$.

ونسمي المتجه:

$$n = \frac{R_u(u_0,v_0) \times R_v(u_0,v_0)}{\left| R_u(u_0,v_0) \times R_v(u_0,v_0) \right|} \qquad (5\text{-}10)$$

متجه وحده الناظم على السطح S في $R(u_0,v_0)$.

الآن بفرض $M(x,y,z)$ نقطة متحولة من المستوي P المماس للسطح S في $M(x,y,z) = R(u_0,v_0)$ عندئذ تكون المتجهات M_0M, R_u, R_v واقعة جميعاً في المستوي المماس P ومنه:

$$(M_0M, R_u, R_v) = 0$$

ومن ثم فإن معادلة المستوي المماس للسطح S في النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ هي:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0 \qquad (5\text{-}11)$$

وإذا كان السطح S معطى بالمعادلات:

$$x=u \; , \; y=v \; , \; z=f(x,y)$$

فإن معادلة المستوي المماس للسطح في النقطة $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ هي:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & f_x(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0,y_0) \end{vmatrix} = 0$$

أما إذا كان السطح S معطى بالمعادلة $F(x,y,z)=0$ فإن المتجه $grad\,F=(F_x,F_y,F_z)$ يعامد السطح S وبالتالي معادلة المستوي المماس للسطح S في النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ هي:

$$(x-x_0)F_x(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)F_y(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)F_z(x_0,y_0,z_0)=0 \qquad (5\text{-}12)$$

5-2- **المستقيم الناظم على سطح:**

بفرض S سطحاً معرفاً بالدالة المتجهية $R=R(u,v)$ ولتكن:

$$M_0(x_0,y_0,z_0)=R(u_0,v_0)$$

نقطة من S و $R_u(u_0,v_0)\times R_v(u_0,v_0)$ متجه الناظم على السطح في M_0، نسمي المستقيم المار من النقطة M_0 والموازي للمتجه $R_u\times R_v$ المستقيم الناظم على السطح S في النقطة M_0.

استناداً إلى $(1\text{-}35)$ فإن معادلتي المستقيم المماس هما:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}} \qquad (5\text{-}13)$$

وإذا كان السطح S معطى بـ $z=f(x,y)$ فإن معادلتي المستقيم المماس في النقطة $z_0=f(x_0,y_0)$ هما:

$$\frac{x-x_0}{-f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{-f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{1} \qquad (5\text{-}14)$$

أما إذا كان السطح S معطى ضمنياً بالمعادلة $F(x,y,z)=0$ فإن معادلتي المستقيم، المماس للسطح S في النقطة $F(x_0,y_0,z_0)$ هما:

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)} \qquad (5\text{-}15)$$

6-2-5 **أمثلة**:

a)- أوجد المستوي المماس والمستقيم الناظم على السطح المعطى بالمعادلة المتجهية:

$$R(u,v)=u(\cos vi+\sin vj)+(1-u^2)k \quad , \quad u\geq 0 \ , \ 0\leq v\leq 2\pi$$

في النقطة الموافقة لـ $u=1$ ، $v=\frac{\pi}{2}$.

الحل:

لنجد متجه الناظم على السطح، لدينا:

$$R_u=\cos v\, i+\sin v\, j-2uk$$
$$R_v=u(-\sin v\, i+\cos v\, j)$$

عندئذٍ فإن متجه الناظم على السطح S هو:

$$R_u\times R_v=2u^2(\cos vi+\sin v\, j)+uk$$

وفي النقطة $u=1$, $v=\frac{\pi}{2}$ يكون:

$$R_u\times R_v=2j+k$$

وبالتالي معادلة المستوي المماس للسطح S في النقطة $(x_0,y_0,z_0)=(0,1,0)$ تكون:

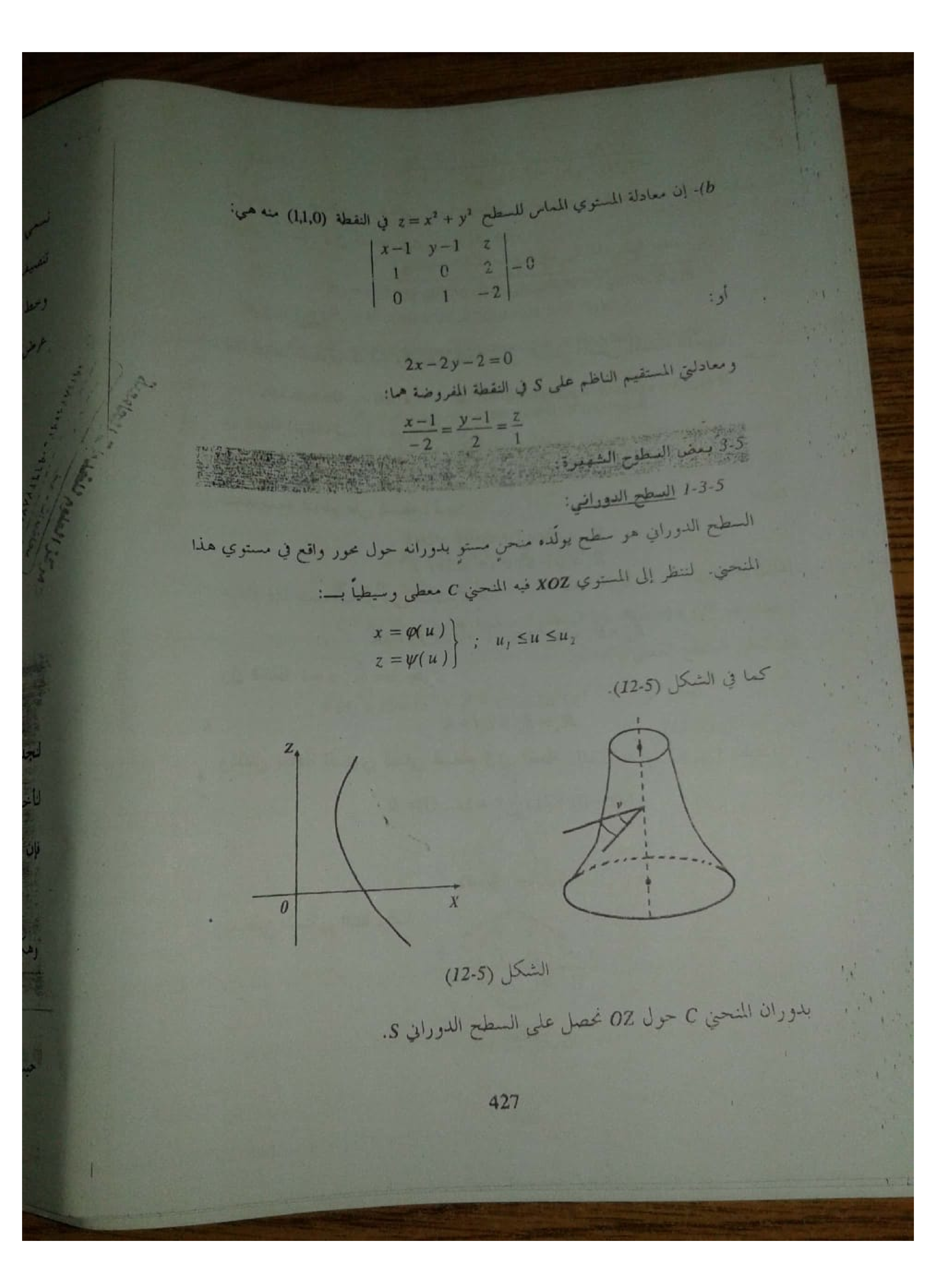
$$0(x-0)+2(y-1)+1(z-0)=0$$

أي:

$$2y+z-2=0$$

ومعادلتي المستقيم الناظم هما:

$$\frac{x-0}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-0}{1}$$



b)- إن معادلة المستوي المماس للسطح $z = x^2 + y^2$ في النقطة (1,1,0) منه هي:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

أو:

$$2x - 2y - 2 = 0$$

ومعادلتي المستقيم الناظم على S في النقطة المفروضة هما:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

3-5 بعض السطوح الشهيرة:

1-3-5 السطح الدوراني:

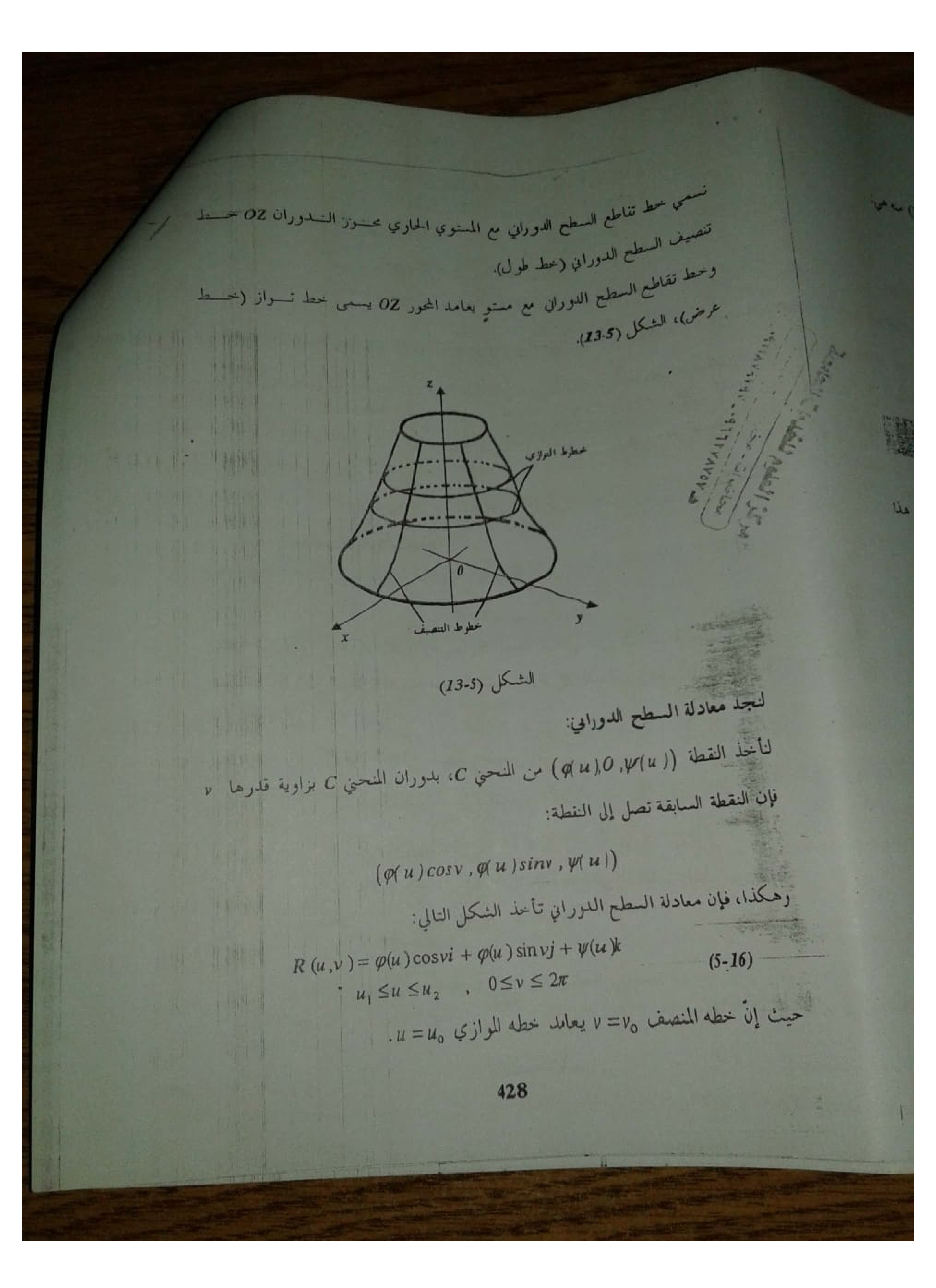
السطح الدوراني هو سطح يولّده منحنٍ مستوٍ بدورانه حول محور واقع في مستوي هذا المنحني. لننظر إلى المستوي XOZ فيه المنحني C معطى وسيطياً بـــ:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u) \\ z &= \psi(u) \end{aligned}\right\} \quad ; \quad u_1 \le u \le u_2$$

كما في الشكل (12-5).

الشكل (12-5)

بدوران المنحني C حول OZ نحصل على السطح الدوراني S.



نسمي خط تقاطع السطح الدوراني مع المستوي الحاوي محور الدوران OZ خط تنصيف السطح الدوراني (خط طول).

وخط تقاطع السطح الدوراني مع مستوٍ يعامد المحور OZ يسمى خط توازٍ (خط عرض)، الشكل (13-5).

الشكل (13-5)

لنجد معادلة السطح الدوراني:

لنأخذ النقطة $(\varphi(u), 0, \psi(u))$ من المنحني C، بدوران المنحني C بزاوية قدرها v فإن النقطة السابقة تصل إلى النقطة:

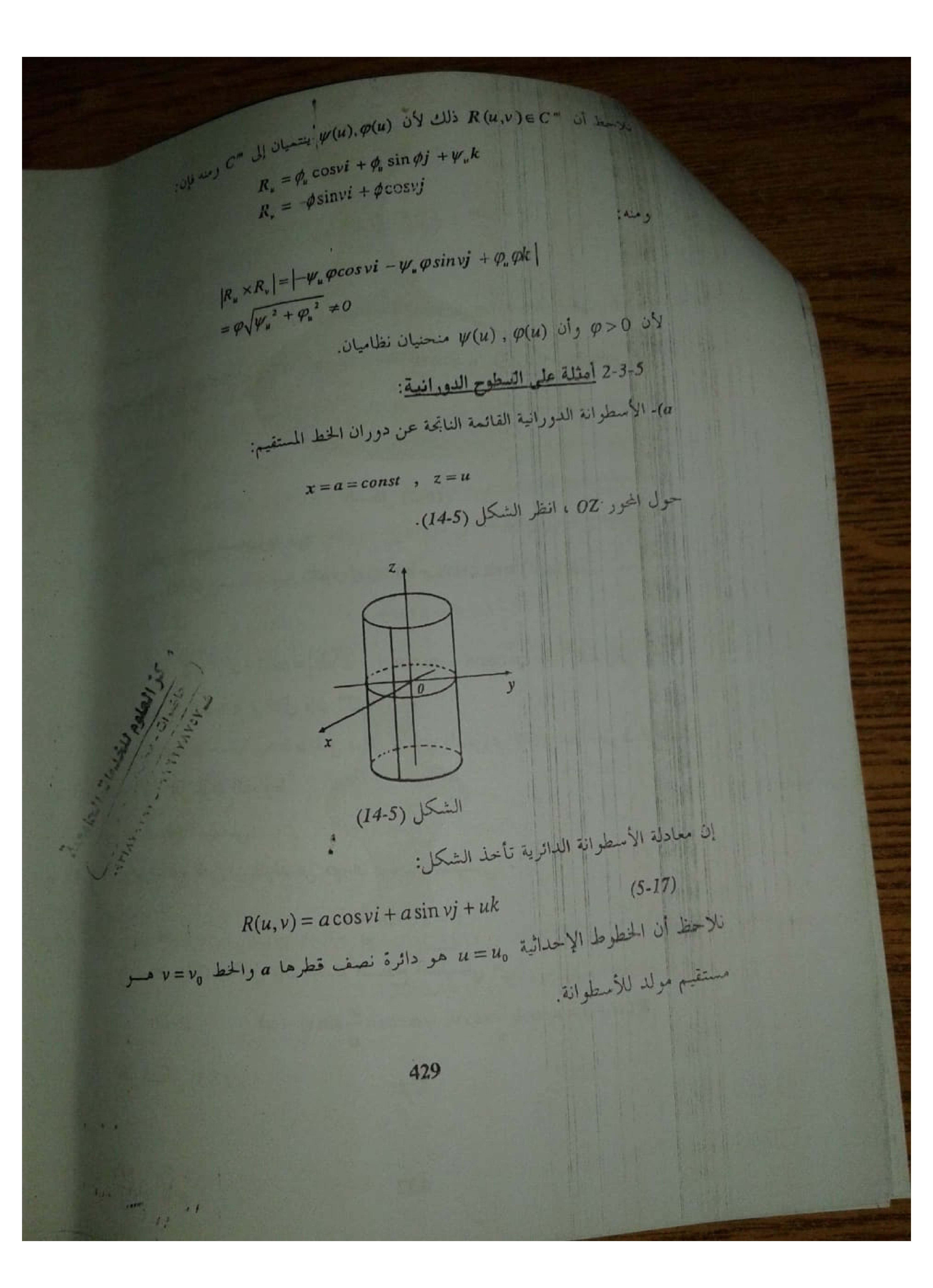
$$(\varphi(u)\cos v, \varphi(u)\sin v, \psi(u))$$

وهكذا، فإن معادلة السطح الدوراني تأخذ الشكل التالي:

$$R(u,v) = \varphi(u)\cos v i + \varphi(u)\sin v j + \psi(u) k \qquad (5\text{-}16)$$

$$u_1 \le u \le u_2 \quad , \quad 0 \le v \le 2\pi$$

حيث إنّ خطه المنصف $v = v_0$ يعامد خطه الموازي $u = u_0$.



نلاحظ أن $R(u,v)\in C^{m}$ ذلك لأن $\psi(u),\varphi(u)$ ينتميان إلى C^{m} ومنه فإن:

$$R_u = \phi_u \cos vi + \phi_u \sin \phi j + \psi_u k$$
$$R_v = -\phi \sin vi + \phi \cos vj$$

ومنه:

$$|R_u \times R_v| = |-\psi_u \varphi \cos vi - \psi_u \varphi \sin vj + \varphi_u \varphi k|$$
$$= \varphi\sqrt{\psi_u{}^2 + \varphi_u{}^2} \neq 0$$

لأن $\varphi > 0$ وأن $\psi(u)$, $\varphi(u)$ منحنيان نظاميان.

2-3-5 أمثلة على السطوح الدورانية:

a)- الأسطوانة الدورانية القائمة الناتجة عن دوران الخط المستقيم:

$$x = a = const \quad , \quad z = u$$

حول المحور OZ ، انظر الشكل (14-5).

الشكل (14-5)

إن معادلة الأسطوانة الدائرية تأخذ الشكل:

$$R(u,v) = a\cos vi + a\sin vj + uk \qquad (5\text{-}17)$$

نلاحظ أن الخطوط الإحداثية $u = u_0$ هو دائرة نصف قطرها a والخط $v = v_0$ هو مستقيم مولد للأسطوانة.

لدينا:

ومنه: $R_u = (0,0,1)$ ، $R_v = (-a\sin v, a\cos v, 0)$

$$|R_u \times R_v| = |-a\cos v i - a\sin v j| = a \neq 0$$

. وبالتالي فإن سطح الأسطوانة سطح نظامي من الصف C^∞ باعتبار أن $R \in C^\infty$.

b)- سطح الكرة: نأخذ كرة الوحدة مثلاً.

سطح كرة الوحدة ناتج عن دوران نصف الدائرة:

$$x = \sin u \ , z = \cos u \quad ; \ 0 \leq u \leq \pi$$

حول المحور OZ.

وبالتالي معادلة الكرة تعطى بالمعادلة:

$$R(u,v) = \sin u \cos v i + \sin u \sin v j + \cos u k$$

نلاحظ أن $R(u,v) \in C^\infty$ وأن:

$$R_u \times R_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

ومنه:

$$|R_u \times R_v| = |-\sin^2 u \cos v i + \sin^2 u \sin v j + \cos u \sin u k| = |\sin u|$$

أي إن سطح الكرة ليس نظامياً على طول المستقيمات $u = \pm n\pi$ ، $n = 0,1,2,...$.

وإذا اعتبرنا أن R معرف على الشرط للانهائي $0 < u < \pi$ ، $-\infty < v < \infty$ فإن سطح الكرة في هذه الحالة يمثل سطحاً نظامياً من الصف C^∞ وهو عبارة عن كرة مثقوبة في قطبيها الشمالي والجنوبي.

انظر الشكل (15-5).

الشكل (15-5)

نسمي أسرة المنحنيات ذات الوسيط v، $(u=u_0)$ خطوط العرض، وخطوط العرض هذه هي تقاطع الكرة مع أسرة المستويات الأفقية $z=\cos u_0$.

نسمي أسرة المنحنيات ذات الوسيط u، $(v=v_0)$ خطوط الطول، وخطوط الطول هذه هي تقاطع الكرة مع أسرة المستويات المارة من المحور OZ وهي $x\sin v_0-y\cos v_0$ ونلاحظ أن $R_u.R_v=0$ أي أن خطوط الطول وخطوط العرض متعامدة على سطح الكرة.

c)- سطح الطارة هو سطح ناتج عن دوران الدائرة:

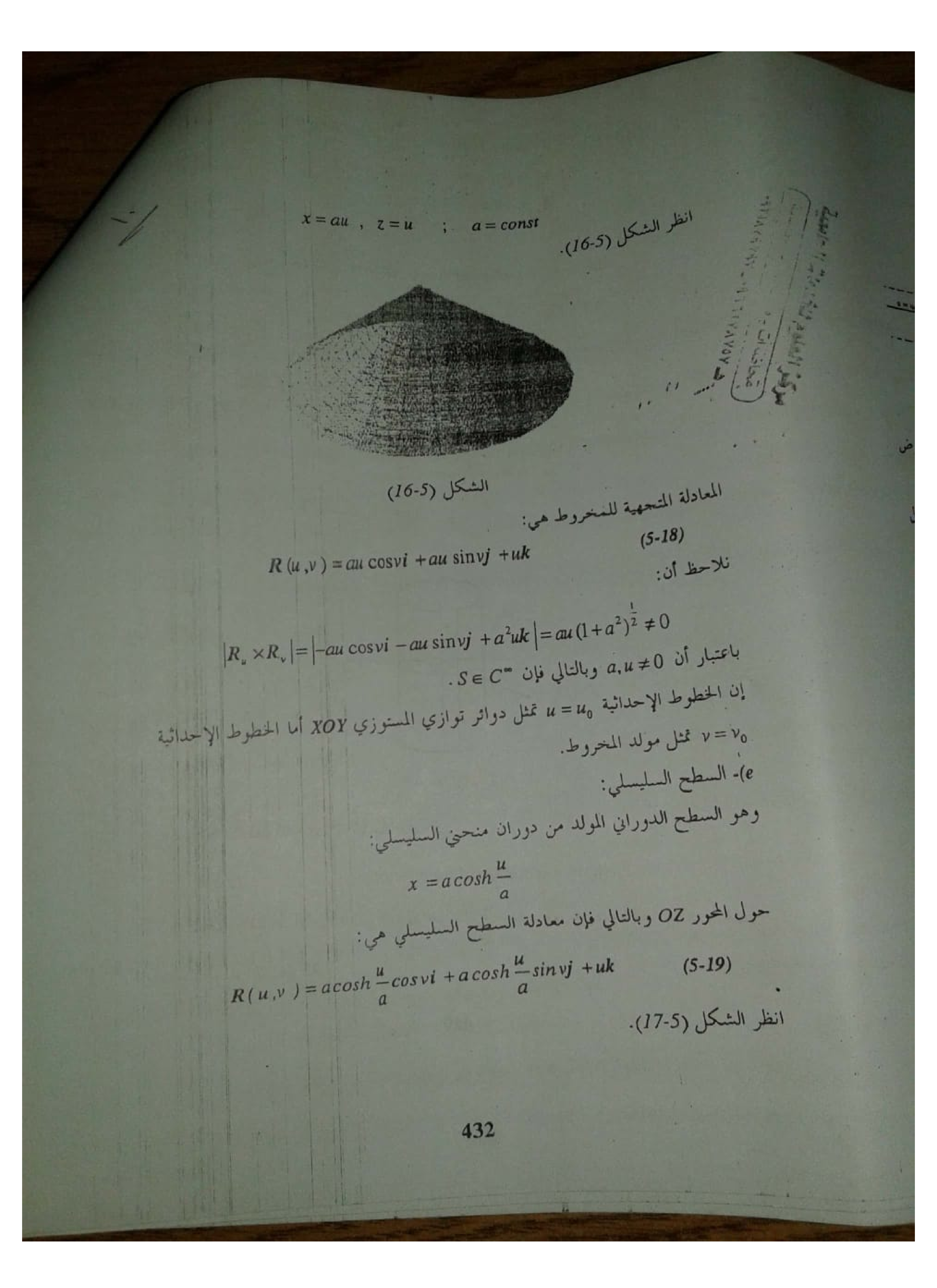
$$x=a+b\sin u\ ,\quad z=b\cos u$$

حول محور واقع في مستويها ولا يشترك معها بأي نقطة حيث $b<a$، b بعد مركز الدائرة عن مبدأ الإحداثيات، انظر الشكل (3-5).

وجدنا في المثال (2-3-5) أن سطح الطارة هو سطح نظامي من المرتبة C^∞ ولتحديد المنحنيات الإحداثية على سطح الطارة نلاحظ أن المنحنيات $u=u_0$ هي دوائر توازي المستوي XOY والمنحنيات $v=v_0$ هي دوائر ناتجة عن تقاطع الطارة بمستويات تعامد المستوي XOY ونلاحظ أن المنحنيات الإحداثية أيضاً متعامدة.

d) المخروط الدوراني:

هو سطح دوراني مولد بالمستقيم:



$x = au \quad , \quad z = u \quad ; \quad a = const$ انظر الشكل (16-5).

الشكل (16-5)

المعادلة المتجهية للمخروط هي:

$$R(u,v) = au\cos v\,i + au\sin v\,j + uk \qquad (5\text{-}18)$$

نلاحظ أن:

$$|R_u \times R_v| = |-au\cos v\,i - au\sin v\,j + a^2uk| = au(1+a^2)^{\frac{1}{2}} \neq 0$$

باعتبار أن $a,u \neq 0$ وبالتالي فإن $S \in C^\infty$.

إن الخطوط الإحداثية $u = u_0$ تمثل دوائر توازي المستوي XOY أما الخطوط الإحداثية $v = v_0$ تمثل مولد المخروط.

e)- السطح السليسلي:

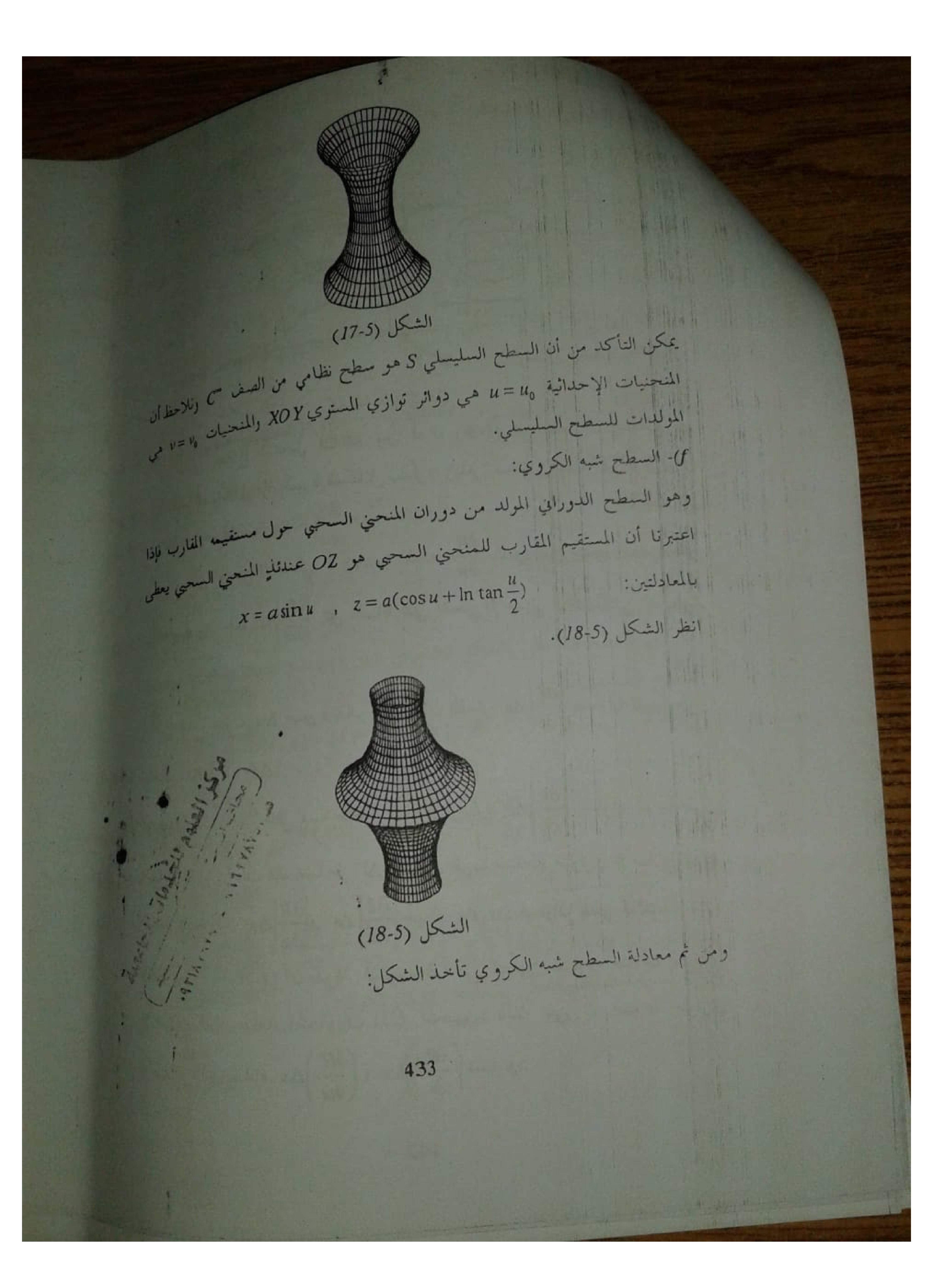
وهو السطح الدوراني المولد من دوران منحني السليسلي:

$$x = a\cosh\frac{u}{a}$$

حول المحور OZ وبالتالي فإن معادلة السطح السليسلي هي:

$$R(u,v) = a\cosh\frac{u}{a}\cos v\,i + a\cosh\frac{u}{a}\sin v\,j + uk \qquad (5\text{-}19)$$

انظر الشكل (17-5).



الشكل (17-5)

يمكن التأكد من أن السطح السليسلي S هو سطح نظامي من الصف C^∞ ونلاحظ أن المنحنيات الإحداثية $u = u_0$ هي دوائر توازي المستوي XOY والمنحنيات $v = v_0$ هي المولدات للسطح السليسلي.

f- السطح شبه الكروي:

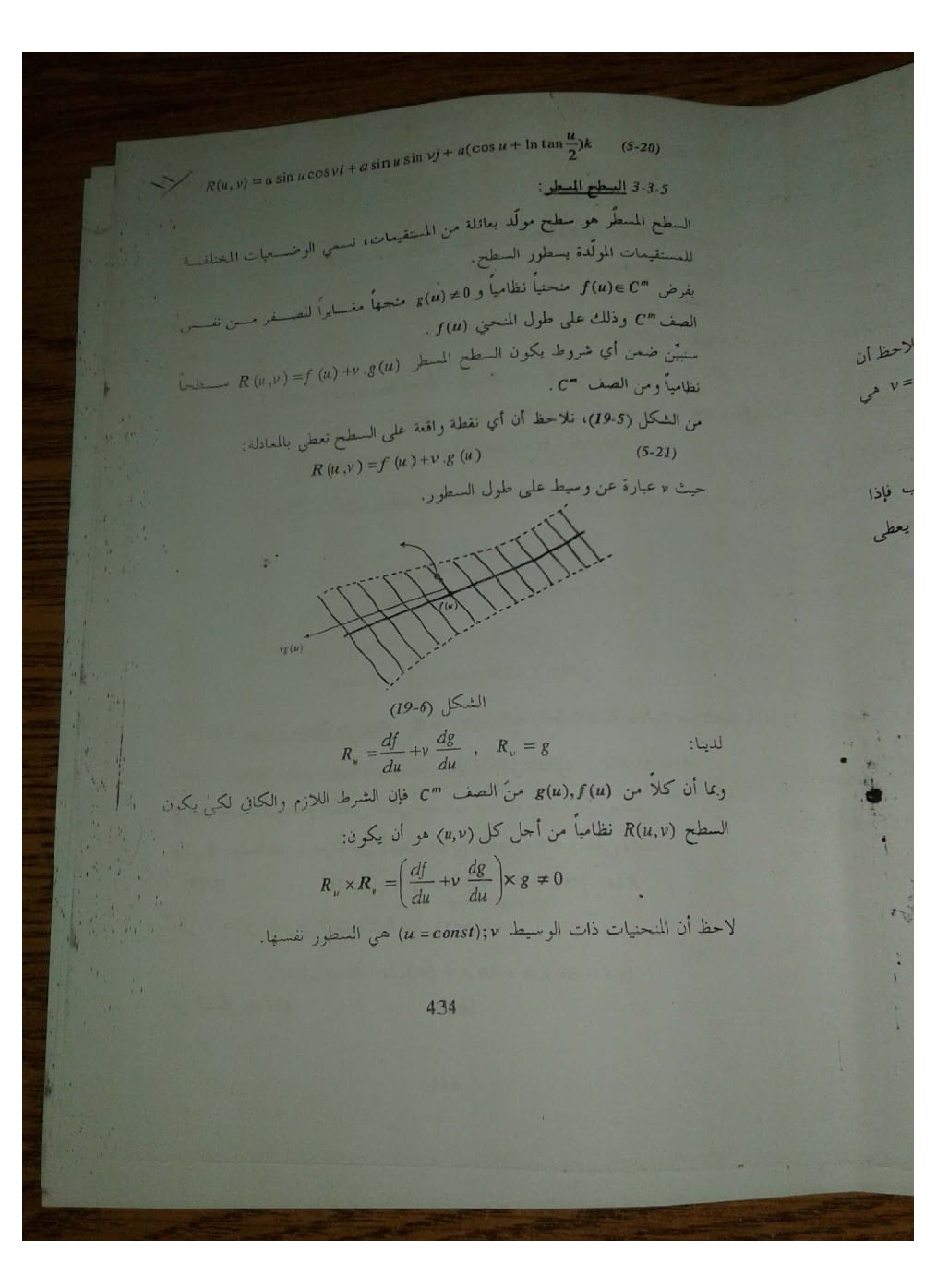
وهو السطح الدوراني المولد من دوران المنحني السحبي حول مستقيمه المقارب فإذا اعتبرنا أن المستقيم المقارب للمنحني السحبي هو OZ عندئذٍ المنحني السحبي يعطى بالمعادلتين:

$$x = a\sin u \quad , \quad z = a(\cos u + \ln \tan \frac{u}{2})$$

انظر الشكل (18-5).

الشكل (18-5)

ومن ثم معادلة السطح شبه الكروي تأخذ الشكل:



$$R(u,v) = a\sin u\cos v\, i + a\sin u\sin v\, j + a(\cos u + \ln\tan\frac{u}{2})k \qquad (5\text{-}20)$$

3-3-5 السطح المسطر:

السطح المسطّر هو سطح مولّد بعائلة من المستقيمات، نسمي الوضعيات المختلفة للمستقيمات المولّدة بسطور السطح.

بفرض $f(u)\in C^m$ منحنياً نظامياً و $g(u)\neq 0$ متجهاً مغايراً للصفر من نفس الصف C^m وذلك على طول المنحني $f(u)$.

سنبيّن ضمن أي شروط يكون السطح المسطر $R(u,v)=f(u)+v.g(u)$ سطحاً نظامياً ومن الصف C^m.

من الشكل (19-5)، نلاحظ أن أي نقطة واقعة على السطح تعطى بالمعادلة:

$$R(u,v)=f(u)+v.g(u) \qquad (5\text{-}21)$$

حيث v عبارة عن وسيط على طول السطور.

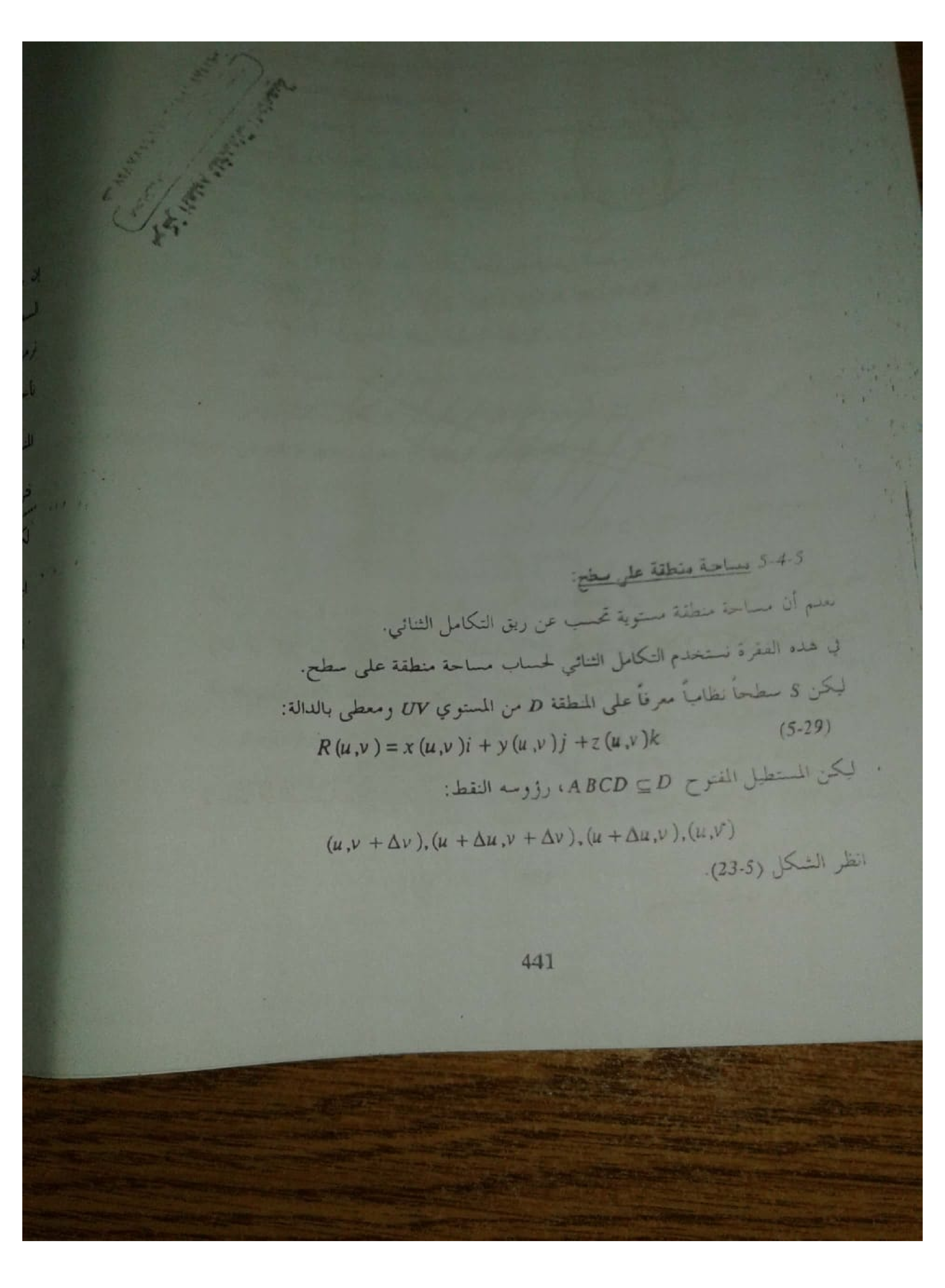
الشكل (19-6)

لدينا:
$$R_u=\frac{df}{du}+v\frac{dg}{du}\ ,\quad R_v=g$$

وبما أن كلاً من $g(u),f(u)$ منَ الصف C^m فإن الشرط اللازم والكافي لكي يكون السطح $R(u,v)$ نظامياً من أجل كل (u,v) هو أن يكون:

$$R_u\times R_v=\left(\frac{df}{du}+v\frac{dg}{du}\right)\times g\neq 0$$

لاحظ أن المنحنيات ذات الوسيط $v;(u=const)$ هي السطور نفسها.



5-4-5 مساحة منطقة على سطح:

نعلم أن مساحة منطقة مستوية تحسب عن ربق التكامل الثنائي.

في هذه الفقرة نستخدم التكامل الثنائي لحساب مساحة منطقة على سطح.

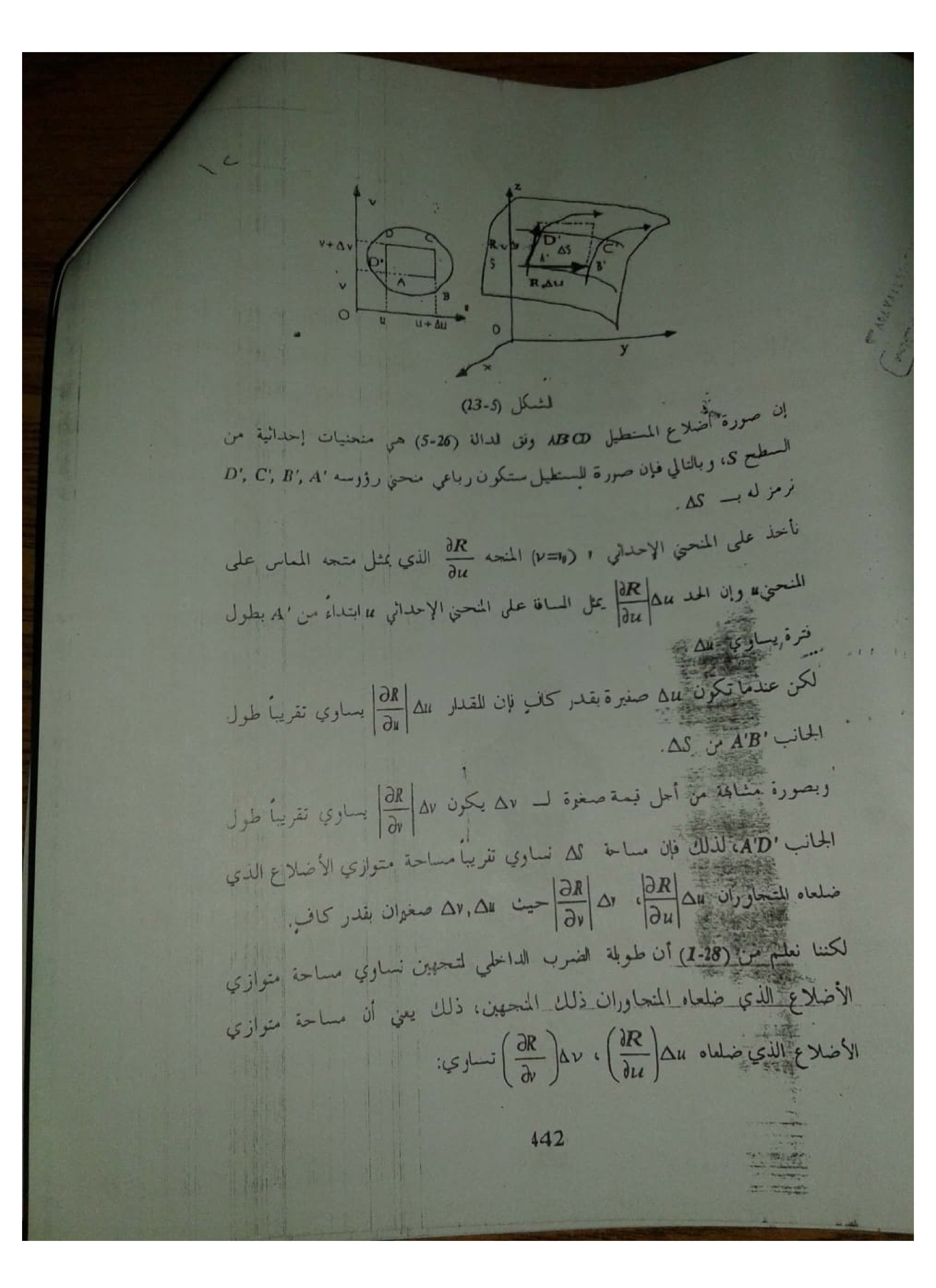
ليكن S سطحاً نظامياً معرفاً على المنطقة D من المستوي UV ومعطى بالدالة:

$$R(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k \tag{5-29}$$

ليكن المستطيل المفتوح $ABCD \subseteq D$، رؤوسه النقط:

$$(u,v+\Delta v),(u+\Delta u,v+\Delta v),(u+\Delta u,v),(u,v)$$

انظر الشكل (23-5).



الشكل (5-23)

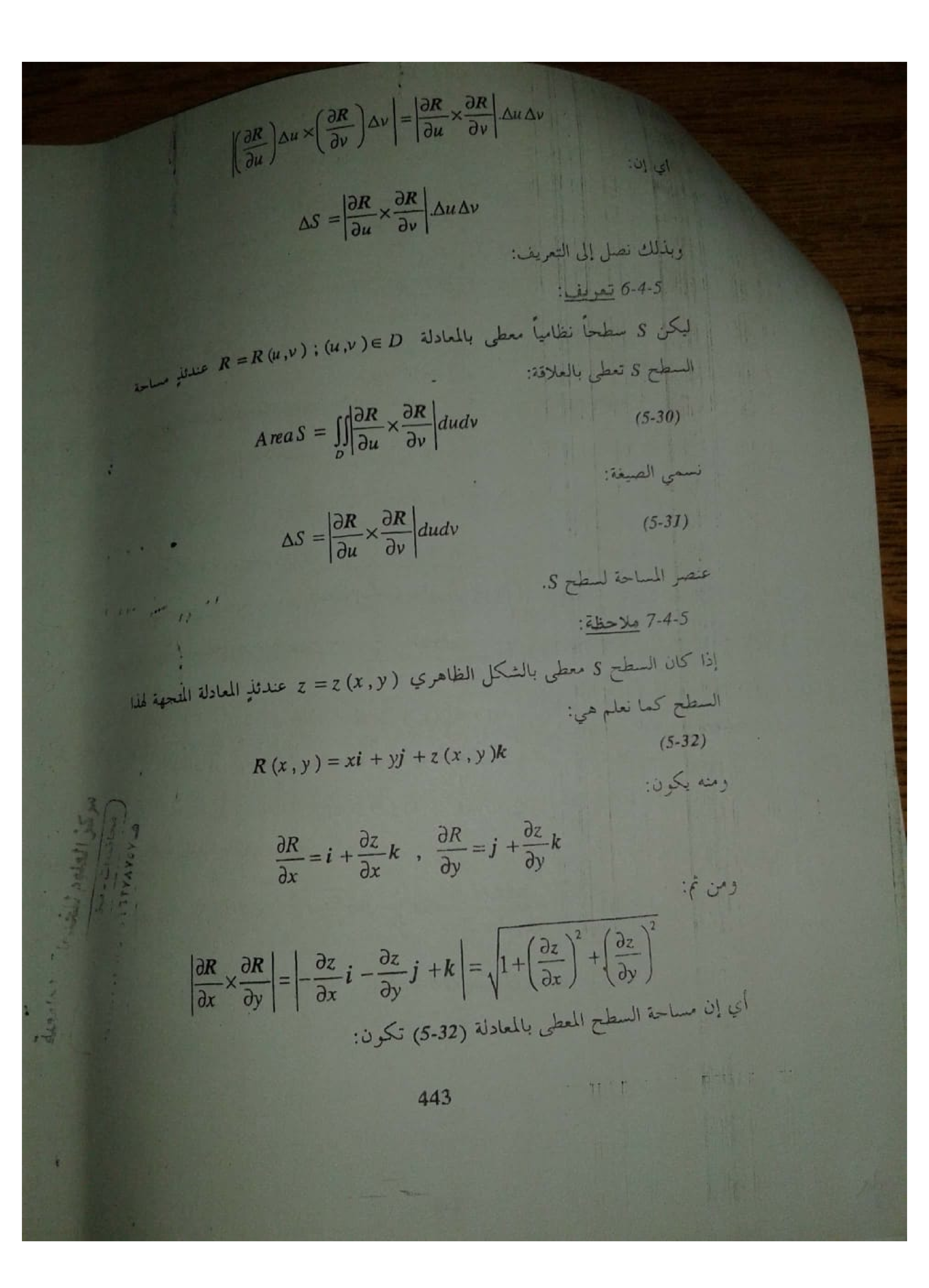
إن صورة أضلاع المستطيل ABCD وفق الدالة (5-26) هي منحنيات إحداثية من السطح S، وبالتالي فإن صورة المستطيل ستكون رباعي منحني رؤوسه A', B', C', D' نرمز له بـ ΔS.

نأخذ على المنحني الإحداثي $(v=v_0)$ المتجه $\frac{\partial R}{\partial u}$ الذي يمثل متجه المماس على المنحني u وإن الحد $\left|\frac{\partial R}{\partial u}\right|\Delta u$ يمثل المسافة على المنحني الإحداثي u ابتداءً من A' بطول فترة يساوي Δu.

لكن عندما تكون Δu صغيرة بقدر كافٍ فإن المقدار $\left|\frac{\partial R}{\partial u}\right|\Delta u$ يساوي تقريباً طول الجانب A'B' من ΔS.

وبصورة مشابهة من أجل قيمة صغيرة لـ Δv يكون $\left|\frac{\partial R}{\partial v}\right|\Delta v$ يساوي تقريباً طول الجانب A'D'، لذلك فإن مساحة ΔS تساوي تقريباً مساحة متوازي الأضلاع الذي ضلعاه المتجاوران $\left|\frac{\partial R}{\partial u}\right|\Delta u$ ، $\left|\frac{\partial R}{\partial v}\right|\Delta v$ حيث Δu, Δv صغيران بقدر كاف.

لكننا نعلم من (1-28) أن طويلة الضرب الداخلي لتجهين تساوي مساحة متوازي الأضلاع الذي ضلعاه المتجاوران ذلك المتجهين، ذلك يعني أن مساحة متوازي الأضلاع الذي ضلعاه $\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)\Delta u$ ، $\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)\Delta v$ تساوي:



$$\left|\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)\Delta u \times \left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)\Delta v\right| = \left|\frac{\partial R}{\partial u} \times \frac{\partial R}{\partial v}\right| . \Delta u \Delta v$$

أي إن:

$$\Delta S = \left|\frac{\partial R}{\partial u} \times \frac{\partial R}{\partial v}\right| . \Delta u \Delta v$$

وبذلك نصل إلى التعريف:

6-4-5 <u>تعريف</u>:

ليكن S سطحاً نظامياً معطى بالمعادلة $R = R(u,v)\ ;\ (u,v) \in D$ عندئذٍ مساحة السطح S تعطى بالعلاقة:

$$Area\,S = \iint_D \left|\frac{\partial R}{\partial u} \times \frac{\partial R}{\partial v}\right| du dv \tag{5-30}$$

نسمي الصيغة:

$$\Delta S = \left|\frac{\partial R}{\partial u} \times \frac{\partial R}{\partial v}\right| du dv \tag{5-31}$$

عنصر المساحة لسطح S.

7-4-5 <u>ملاحظة</u>:

إذا كان السطح S معطى بالشكل الظاهري $z = z(x,y)$ عندئذٍ المعادلة المتجهة لهذا السطح كما نعلم هي:

$$R(x,y) = xi + yj + z(x,y)k \tag{5-32}$$

ومنه يكون:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = i + \frac{\partial z}{\partial x}k \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial y} = j + \frac{\partial z}{\partial y}k$$

ومن ثم:

$$\left|\frac{\partial R}{\partial x} \times \frac{\partial R}{\partial y}\right| = \left|-\frac{\partial z}{\partial x}i - \frac{\partial z}{\partial y}j + k\right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

أي إن مساحة السطح المعطى بالمعادلة (5-32) تكون:

$$A = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \qquad (5\text{-}33)$$

8-4-5 أمثلة:

a)- لنثبت أن مساحة الكرة تساوي $4\pi a^2$ حيث a نصف قطر الكرة وذلك استناداً إلى العلاقة (5-27).

الحل:

لدينا معادلة الكرة:

$$R(u,v) = a(\sin u\cos v)i + a(\sin u\sin v)j - a\sin uk$$

ومن ثم:

$$\frac{\partial R}{\partial u} = a(\cos u\cos v)i + a(\cos u\sin v)j - a\sin uk$$

$$\frac{\partial R}{\partial v} = -a(\sin u\sin v)i + a(\cos u\cos v)j$$

ومنه يكون:

$$\left|\frac{\partial R}{\partial u}\times\frac{\partial R}{\partial v}\right| = a^2\sin u$$

إذاً مساحة الكرة تساوي:

$$Area\,S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin u\,du\,dv = 4\pi a^2$$

b)- أوجد مساحة السطح المخروط الدوراني المعطى بالمعادلة:

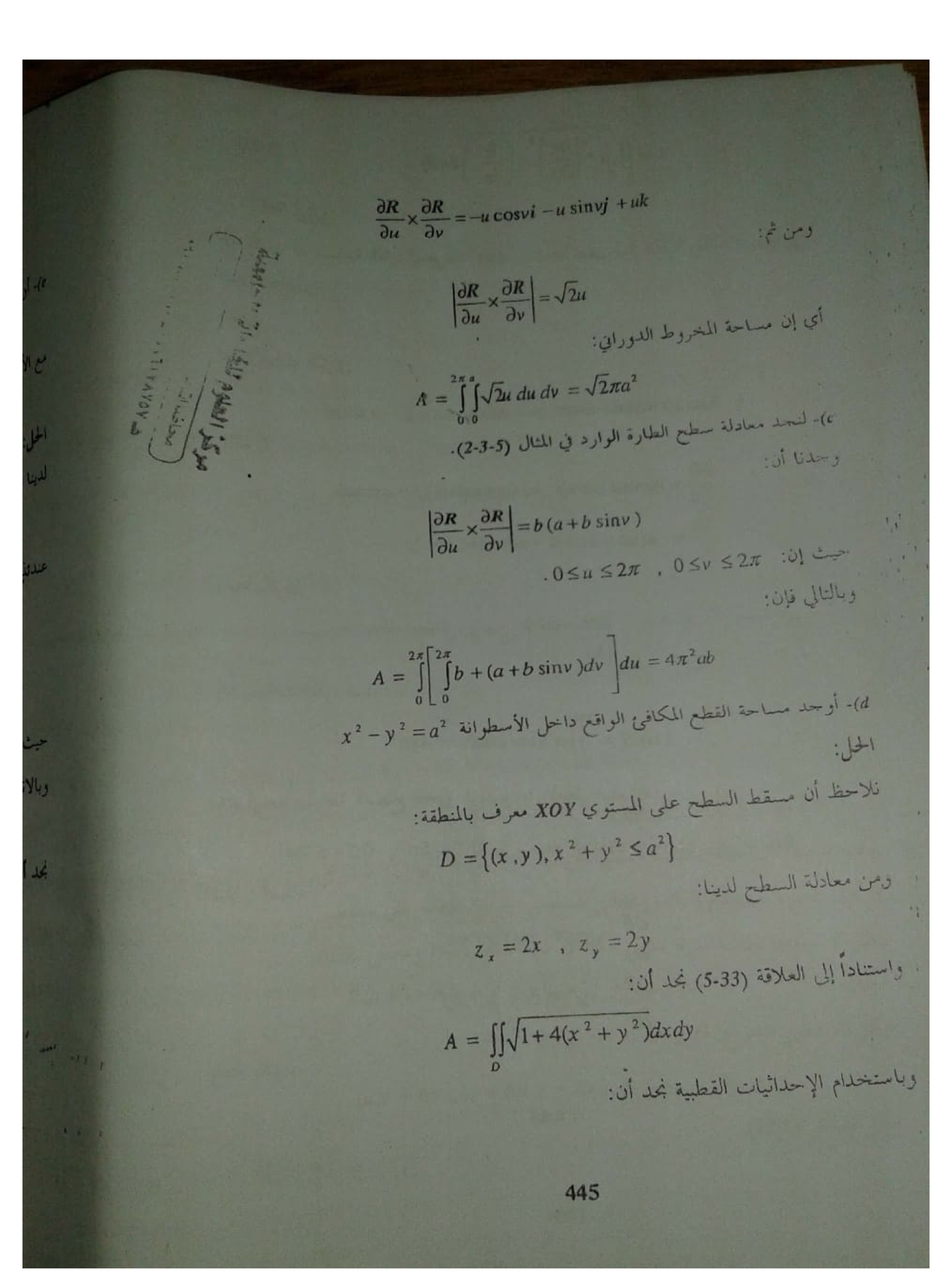
$$R(u,v) = u\cos vi + u\sin vj + uk \;;\; (0\le u\le a \;,\; 0\le v\le 2\pi)$$

الحل: لدينا،

$$\frac{\partial R}{\partial u} = \cos vi + \sin vj + k$$

$$\frac{\partial R}{\partial v} = -u\sin vi + u\cos vj$$

ومنه يكون:



$$\frac{\partial R}{\partial u}\times\frac{\partial R}{\partial v}=-u\cos v i-u\sin v j+uk$$

ومن ثم:

$$\left|\frac{\partial R}{\partial u}\times\frac{\partial R}{\partial v}\right|=\sqrt{2}u$$

أي إن مساحة المخروط الدوراني:

$$A=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\sqrt{2}u\,du\,dv=\sqrt{2}\pi a^2$$

c)- لنجد معادلة سطح الطارة الوارد في المثال (5-3-2).

وجدنا أن:

$$\left|\frac{\partial R}{\partial u}\times\frac{\partial R}{\partial v}\right|=b(a+b\sin v)$$

حيث إن: $0\le v\le 2\pi$ ، $0\le u\le 2\pi$.

وبالتالي فإن:

$$A=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}b+(a+b\sin v)dv\right]du=4\pi^2ab$$

d)- أوجد مساحة القطع المكافئ الواقع داخل الأسطوانة $x^2-y^2=a^2$

الحل:

نلاحظ أن مسقط السطح على المستوي XOY معرف بالمنطقة:

$$D=\left\{(x,y),x^2+y^2\le a^2\right\}$$

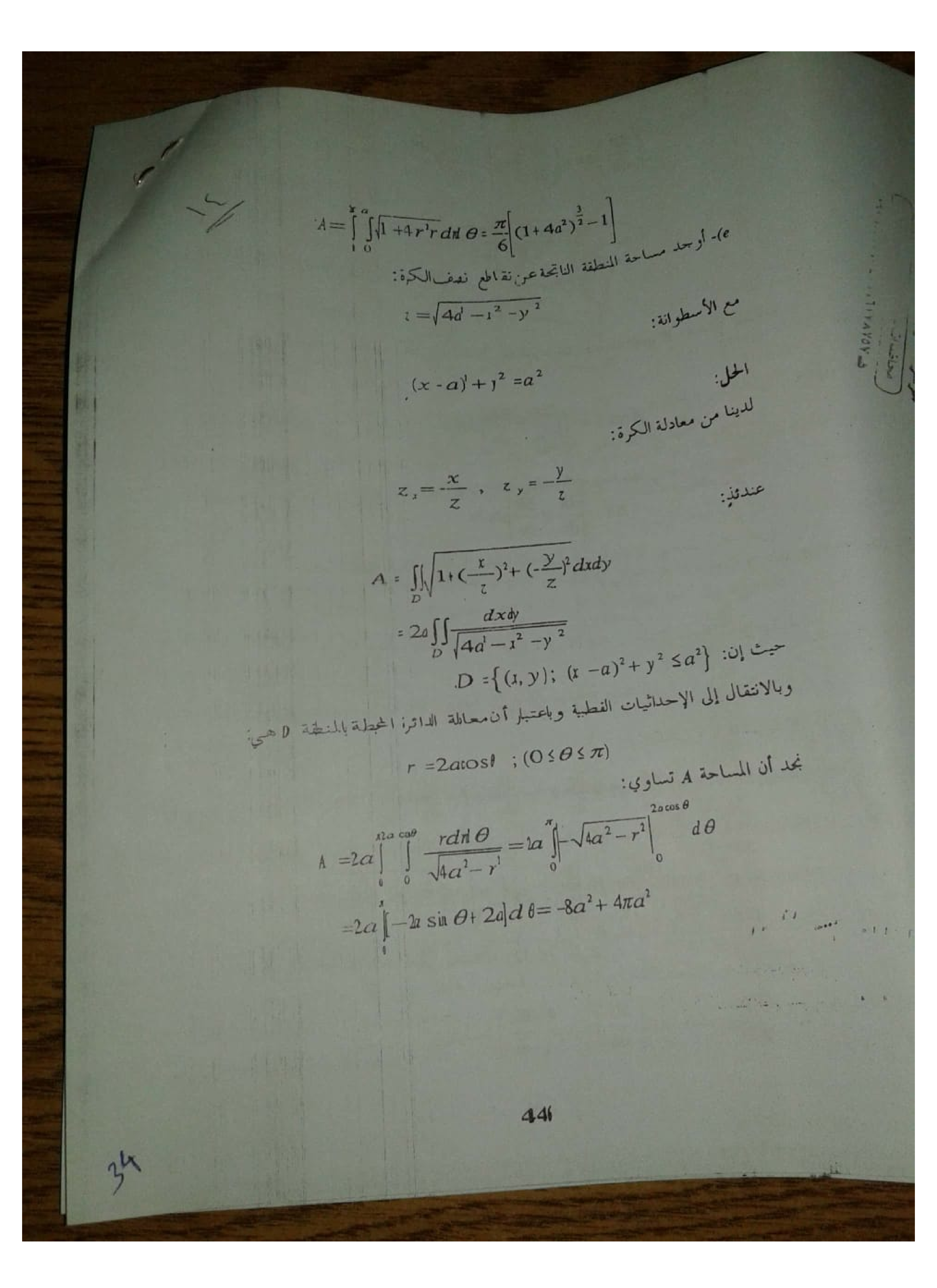
ومن معادلة السطح لدينا:

$$z_x=2x\quad,\quad z_y=2y$$

واستناداً إلى العلاقة (5-33) نجد أن:

$$A=\iint_D\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية نجد أن:



$$A=\int_0^{\pi}\int_0^{a}\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{6}\left[(1+4a^2)^{\frac{3}{2}}-1\right]$$

e)- أوجد مساحة المنطقة الناتجة عن تقاطع نصف الكرة:

$$z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$$

مع الأسطوانة:

$$(x-a)^2+y^2=a^2$$

الحل:

لدينا من معادلة الكرة:

عندئذ:

$$z_x=-\frac{x}{z}\ ,\quad z_y=-\frac{y}{z}$$

$$A=\iint_D\sqrt{1+\left(-\frac{x}{z}\right)^2+\left(-\frac{y}{z}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$=2a\iint_D\frac{dx\,dy}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}$$

حيث إن: $D=\{(x,y);\ (x-a)^2+y^2\le a^2\}$

وبالانتقال إلى الإحداثيات القطبية وباعتبار أن معادلة الدائرة المحيطة بالمنطقة D هي:

$$r=2a\cos\theta\ ;\ (0\le\theta\le\pi)$$

نجد أن المساحة A تساوي:

$$A=2a\int_0^{\pi}\int_0^{2a\cos\theta}\frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{4a^2-r^2}}=2a\int_0^{\pi}\left[-\sqrt{4a^2-r^2}\right]_0^{2a\cos\theta}d\theta$$

$$=2a\int_0^{\pi}\left[-2a\sin\theta+2a\right]d\theta=-8a^2+4\pi a^2$$

34